Petrijeve mreže

N. Zimic

Uvod v Petrijeve mreže

- Petrijeve mreže je uvedel gospod Carl A. Petri leta 1962
- Petrijeve mreže so orodje za modeliranje, formalno analizo in dizajn diskretnih sistemov
- Petrijeve mreže so matematično in grafično orodje za modeliranje
- Petrijeve mreže se uporabljajo za:
  - modeliranje in simulacijo komunikacijskih protokolov,
  - modeliranje in simulacijo sistemov v relnem času,
  - modeliranje in simulacijo varnostno kritičnih sistemov,
  - iskanje smrtnih objemov,
  - modeliranje in analizo programske opreme,
  - ...

Definicija Petrijeve mreže

- Petrijeva mreža C je urejen četvorček:
  $C = (P, T, I, O)$
- Kjer sta P in T:

  $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}, \quad n \geq 0,$ končna množica mest

  $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_m\}, \quad m \geq 0,$ končna množica prehodov
- Množici P in T sta tuji množici:
  $P \cap T = \varnothing$

N. Zimic 1-3

Definicija Petrijeve mreže (nad.)

- I je vhodna funkcija, ki definira preslikavo iz množice prehodov T v posplošeno množico P^∞:

  $I : T \rightarrow P^\infty$
- O je izhodna funkcija, ki definira preslikavo iz množice prehodov T v posplošeno množico P^∞:

  $O : T \rightarrow P^\infty$

Posplošena množica je X^n tista množica, v kateri se lahko določen element v njej pojavi največ n krat.

N. Zimic 1-4

Primer Petrijeve mreže

- Primer Petrijeve mreže:

$$C = (P, T, I, O)$$
$$P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$$
$$T = \{t_1, t_2, t_3\}$$

$$I(t_1) = \{p_1\} \qquad O(t_1) = \{p_2, p_3, p_5\}$$
$$I(t_2) = \{p_2, p_3, p_5\} \qquad O(t_2) = \{p_5, p_5\}$$
$$I(t_3) = \{p_3, p_5\} \qquad O(t_3) = \{p_4\}$$

Vhodna in izhodna mesta

- Število vhodnih mest p_i za prehod t_j je število elementov p_i v posplošeni množici $I(t_j)$:
  $\#(p_i, I(t_j))$
- Število izhodnih mest p_i za prehod t_j je število elementov p_i v posplošeni množici $O(t_j)$:
  $\#(p_i, O(t_j))$
- Mesto p_i je vhodno mesto za prehod t_j, če velja:
  $p_i \in I(t_j)$
- Mesto p_i je izhodno mesto za prehod t_j, če velja:
  $p_i \in O(t_j)$

Razširitev vhodne in izhodne funkcije

- Vhodno funkcijo I in izhodno funkcijo O razširimo tako, da velja:

  $I : P \rightarrow T^{\infty}$

  $O : P \rightarrow T^{\infty}$

- Ker je število vhodnih prehodov t_j za mesto p_i enako številu izhodnih mest p_i za prehod t_j:

  $\#(t_j, I(p_i)) = \#(p_i, O(t_j))$

- In ker je število izhodnih prehodov t_j za mesto p_i enako številu vhodnih mest p_i za prehod t_j:

  $\#(t_j, O(p_i)) = \#(p_i, I(t_j))$

Razširitev vhodne in izhodne funkcije (nad)

- Za prej prikazano Petrijevo mrežo lahko razširimo vhodne in izhodne funkcije:

$$C = (P, T, I, O)$$
$$P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$$
$$T = \{t_1, t_2, t_3\}$$

$I(p_1) = \varnothing$	$O(p_1) = \{t_1\}$
$I(p_2) = \{t_1\}$	$O(p_2) = \{t_2\}$
$I(p_3) = \{t_1\}$	$O(p_3) = \{t_2, t_3\}$
$I(p_4) = \{t_3\}$	$O(p_4) = \varnothing$
$I(p_5) = \{t_1, t_2, t_2\}$	$O(p_5) = \{t_2, t_3\}$

Petrijev graf

- Petrijevo mrežo lahko grafično ponazorimo z Petrijevim grafom.
- Elementi Petrijevega grafa so:
  - mesta, ki ustrezajo mestom p v Petrijevi mreži,
  - prehajanja, ki ustrezajo prehodom t v Petrijevi mreži,
  - usmerjene povezave, ki ustrezajo vhodnim in izhodnim funkcijam Petrijeve mreže.
- Mesta v Petrijevem grafu označujemo z krogom ○ , prehajanja pa s črto | , oziroma pravokotnikom ▯ .

Petrijev graf (nad.)

- Petrijev graf *G* je biparitetni usmerjen multigraf *G*=(*V*,*A*), kjer je $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_s\}$ množica spojišč in $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_r\}$ posplošena množica usmerjenih povezav $a_i=(v_j,v_k)\in V$. Množica *V* je $V=P\cup T$ in za vsako usmerjeno povezavo $a_i\in A$ velja: $a_i=(v_j,v_k)$, kjer je $v_j\in P$ in $v_k\in T$ ali $v_j\in T$ in $v_k\in P$.

Petrijev graf (nad.)

- Definirajmo $V = P \cup T$. A je posplošena množica usmerjenih povezav, tako za vsak $p_i \in P$ in $t_j \in T$ velja:

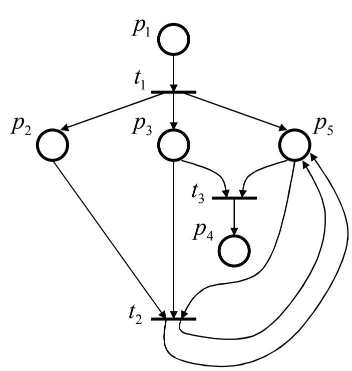
$$\#((p_i, t_j), A) = \#(p_i, I(t_j))$$

$$\#((t_j, p_i), A) = \#(p_i, O(t_j))$$

- V tem primeru je Petrijev graf $G(V,A)$ ekvivalenten Petrijevi merži $C=(P,T,I,O)$.

Petrijev graf (nad.)

- Primer Petrijevega grafa za prej podano Petrijevo mrežo.



Dualna in inverzna Petrijeva mreža

- Dualno Petrijevo mrežo dobimo z zamenjavo mest in prehajanj. Za Petrijevo mrežo C:

  $C = (P, T, I, O)$
- Je dualna Petrijeva mreža:

  $C_d = (T, P, I, O)$
- Inverzna Petrijeva mreža ima zamenjani vhodno in izhodno funkcijo:

  $C_i = (P, T, O, I)$

N. Zimic 1-13

Dualna in inverzna Petrijeva mreža (nad.)

- Dualna Petrijeva mreža za prejšnji primer:

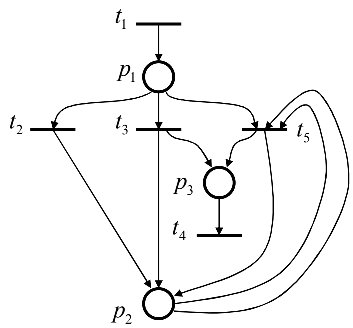
$$C = (P, T, I, O)$$
$$P = \{p_1, p_2, p_3\}$$
$$T = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$$

$$I(p_1) = \{t_1\} \qquad O(p_1) = \{t_2, t_3, t_5\}$$
$$I(p_2) = \{t_2, t_3, t_5\} \qquad O(p_2) = \{t_5, t_5\}$$
$$I(p_3) = \{t_3, t_5\} \qquad O(p_3) = \{t_4\}$$

N. Zimic 1-14

Dualna in inverzna Petrijeva mreža (nad.)

- Primer Petrijevega grafa za prej podano dualno Petrijevo mrežo.



Dualna in inverzna Petrijeva mreža (nad.)

- Inverzna Petrijeva mreža za prejšnji primer :

$$C = (P, T, I, O)$$
$$P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$$
$$T = \{t_1, t_2, t_3\}$$

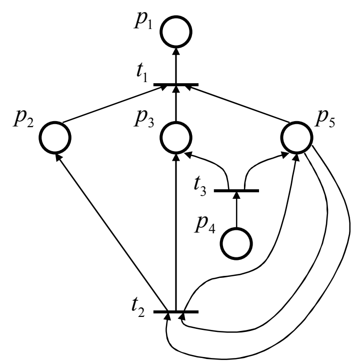
$O(t_1) = \{p_1\}$ $\quad$ $I(t_1) = \{p_2, p_3, p_5\}$

$O(t_2) = \{p_2, p_3, p_5\}$ $\quad$ $I(t_2) = \{p_5, p_5\}$

$O(t_3) = \{p_3, p_5\}$ $\quad$ $I(t_3) = \{p_4\}$

Dualna in inverzna Petrijeva mreža (nad.)

- Primer Petrijevega grafa za prej podano inverzno Petrijevo mrežo.



Označevanje v Petrijevi mreži

- Označevanje v Petrijevi mreži je dodeljevanje osnovnih postavk (žetonov) posameznim mestom v mreži. Število žetonov se lahko pri izvajanju Petrijeve mreže spreminja.
- Označevanje o v Petrijevi mreži C=(P,T,I,O) je funkcija, ki mestom P priredi pozitivna cela števila N:

$$o : P \to N$$

- Označevanje lahko predstavimo tudi z označitvenim vektorjem:

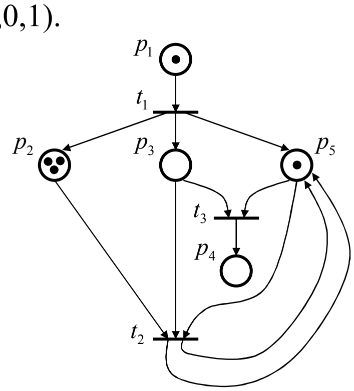
$$\boldsymbol{o} = (o_1, o_2, \ldots, o_n), \qquad n = |P|$$

Označevanje v Petrijevi mreži (nad.)

- Označeno Petrijevo mrežo zapišemo:
  $M = (C, \boldsymbol{o})$
- Oziroma na daljši način:
  $M = (P, T, I, O, \boldsymbol{o})$
- V Petrijevem grafu se žetoni ponazarjajo s pikami v mestih. Če je število pik preveliko, se le te nadomestijo s številko, ki predstavlja število žetonov.

Označevanje v Petrijevi mreži (nad.)

- Primer označenega Petrijevega grafa z označitvijo $\boldsymbol{o}$=(1,3,0,0,1).

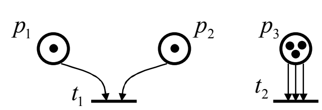


Izvajanje Petrijeve mreže

- Izvajanje Petrijeve mreže je pogojeno z označitvijo mreže ***o***, ki se pri izvajanju spreminja. Izvajanje mreže se izvede z vžigom izbranega prehoda t_i. Vžig se izvede tako, da se iz vhodnih mest odvzamejo ter na izhodna mesta dodajo žetoni.
- Prehod $t_j \in T$ v označeni Petrijevi mreži $M = (P, T, I, O, \boldsymbol{o})$ je izbran (omogočen), če za vsa mesta $p_i \in P$ velja $o(p_i) \geq \#(p_i, I(t_j))$.

Izvajanje Petrijeve mreže (nad.)

- Primer Petrievih grafov, kjer je izpolnjen pogoj za vžig:

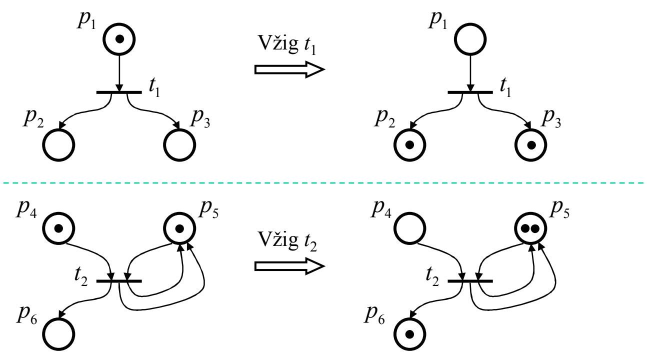


- Prehod t_j v označeni Petrijevi mreži z označitvijo ***o*** lahko vžge, kadar je izbrano (omogočeno). Vžig izbranega prehoda t_j nam da novo označitev:

$$o'(p_i) = o(p_i) - \#(p_i, I(t_j)) + \#(p_i, O(t_j))$$

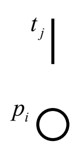
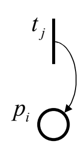
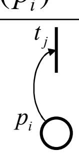
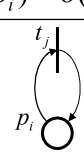
Izvajanje Petrijeve mreže (nad.)

- Primer izvajanja Petrievih grafov:



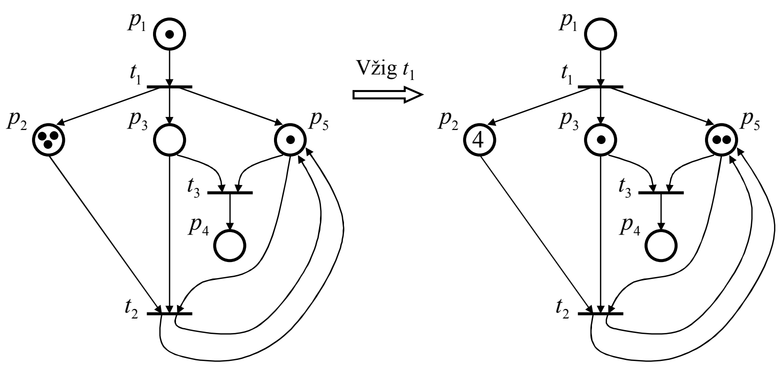
Izvajanje Petrijeve mreže (nad.)

- Možni primeri vžiga za poljubne pare prehodov in mest.

	$\#(p_i, O(t_j)) = 0$	$\#(p_i, O(t_j)) = 1$
$\#(p_i, I(t_j)) = 0$	 $o'(p_i) = o(p_i)$	 $o'(p_i) = o(p_i) + 1$
$\#(p_i, I(t_j)) = 1$	 $o'(p_i) = o(p_i) - 1$	 $o'(p_i) = o(p_i) - 1 + 1$

Izvajanje Petrijeve mreže (nad.)

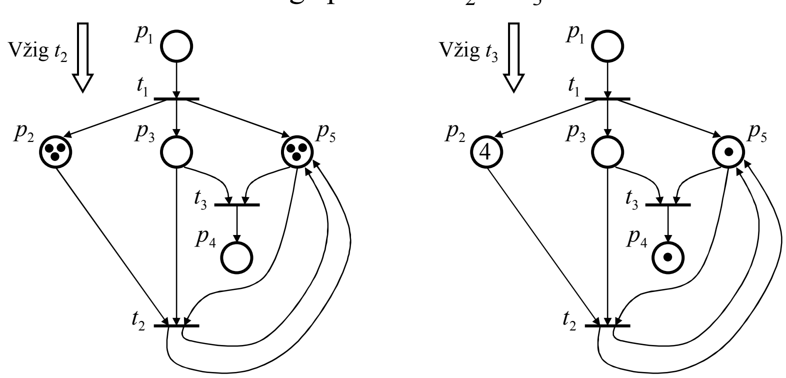
- Primer izvajanja Petrijevega grafa:



$\boldsymbol{o} = (1,3,0,0,1)$ $\qquad$ $\boldsymbol{o}' = (0,4,1,0,2)$

Izvajanje Petrijeve mreže (nad.)

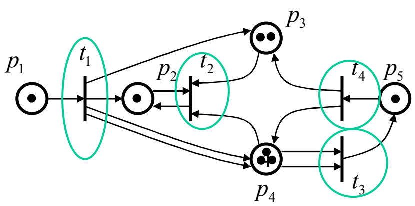
- Dve možnosti vžiga prehodov t_2 ali t_3:



$\boldsymbol{o}'' = (0,3,0,0,3)$ $\qquad$ $\boldsymbol{o}'' = (0,4,0,1,1)$

Izvajanje Petrijeve mreže (nad.)

- Drugi primer izvajanja:



$$\boldsymbol{o} = (1,0,0,1,1)$$
$$\boldsymbol{o}' = (0,1,1,3,1)$$
$$\boldsymbol{o}'' = (0,1,2,4,0)$$
$$\boldsymbol{o}''' = (0,1,2,2,1)$$
$$\boldsymbol{o}'''' = (0,1,1,1,1)$$

Vžig Možni vžigi

Konec animacije!

Prostor stanj Petrijeve mreže

- Stanje Petrijeve mreže je določeno z označitvijo.
- Prostor stanj N^n Petrijeve mreže je množica vseh možnih označitev, če ima mreža n mest.
- Označitveni vektor o se pri izvajanju Petrijeve mreže spreminja. Za Petrijevo mrežo C=(P,T,I,O) pri vžigu prehoda t_j lahko definiramo kot funkcijo prehajanja stanj:

  $$\delta : N^n \times T \rightarrow N^n$$

- ki velja samo, če velja pogoj za vžig prehoda t_j :

  $$o(p_i) \geq \#(p_i, I(t_j)), \quad \forall p_i \in P$$

Prostor stanj Petrijeve mreže (nad.)

- Funkcija naslednjega stanja je:
  $$\delta(\boldsymbol{o},t_j)=\boldsymbol{o}'$$
- pri čemer velja:
  $$\boldsymbol{o}'(p_i)=\boldsymbol{o}(p_i)-\#(p_i,I(t_j))+\#(p_i,O(t_j)),\quad \forall p_i\in P$$
- Petrijeva mreža C=(P,T,I,O) z začetno označitvijo $\boldsymbol{o}^0$ pri vžigu prehoda t_j zavzame novo označitev $\boldsymbol{o}^1$.
  $$\boldsymbol{o}^1=\delta(\boldsymbol{o}^0,t_j)$$
- Pri vžigu naslednjega prehoda t_k, zavzame Petrijeva mreža novo označitev $\boldsymbol{o}^2$:
  $$\boldsymbol{o}^2=\delta(\boldsymbol{o}^1,t_k)$$

Prostor stanj Petrijeve mreže (nad.)

- Zaporedju vžigov v Petrijevi mreži:
  $$(t_{j0},t_{j1},t_{j2},\ldots)$$
- Ustreza zaporedje označitev v Petrijevi mreži:
  $$(\boldsymbol{o}^0,\boldsymbol{o}^1,\boldsymbol{o}^2,\ldots)$$
- Ti dve zaporedji ureja relacija:
  $$\delta(\boldsymbol{o}^k,t_j)=\boldsymbol{o}^{k+1},\quad k=0,1,2,\ldots$$
- Za Petrijevo mrežo z označitvijo $\boldsymbol{o}$ je označitev $\boldsymbol{o}$’ neposredno dosegljiva, če obstaja prehod $t_j\in T$, tako da velja:
  $$\delta(\boldsymbol{o},t_j)=\boldsymbol{o}'$$

Dosegljivost Petrijeve mreže

- Za Petrijevo mrežo C=(P,T,I,O) je dosegljivost množica R(C,$\boldsymbol{o}$), kjer je o začetna označitev.
- V množico R(C,$\boldsymbol{o}$) spada začetna označitev:

$$\boldsymbol{o} \in R(C, \boldsymbol{o})$$

- In vse označitve $\boldsymbol{o}^k$, za katere velja:

$$\delta(\boldsymbol{o}^k, t_j) = \boldsymbol{o}^{k+1}, \quad k = 0,1,2,...$$

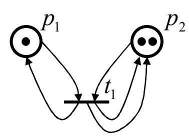
- pri čemer je $\boldsymbol{o}^0$ začetna označitev $\boldsymbol{o}$.

Dosegljivost Petrijeve mreže (nad.)

- V množico R(C,$\boldsymbol{o}$) spada začetna označitev in vse označitve, do katerih pridemo iz začetne označitve preko vžigov v Petrijevi mreži.
- Vsi vektorji v množici R(C,$\boldsymbol{o}$) so dosegljivi iz začetne označitve, zato se lahko dosegljivost izriše v obliki drevesne strukture. Na vrhu je začetna označitev v listih so označitve, ki so posledica vžigov v Petrijevi mreži.
- Iskanje dosegljivosti se zaključi:
  - ko ni več pogoja za vžig,
  - ko je dosežena označitev, ki je že bila razdelana,
  - ko se število žetonov nenehno povečuje.

Dosegljivost Petrijeve mreže (nad.)

- Primer Petrijevega grafa, kjer se število žetonov pri izvajanju nenehno povečuje.

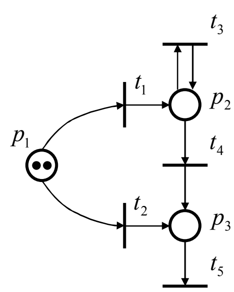


$$(1,2) \xrightarrow{t_1} (1,3) \xrightarrow{t_1} (1,4) \xrightarrow{t_1} \cdots$$

$$R(C,(1,2)) = \{(1,2),(1,3),(1,4),\ldots\}$$

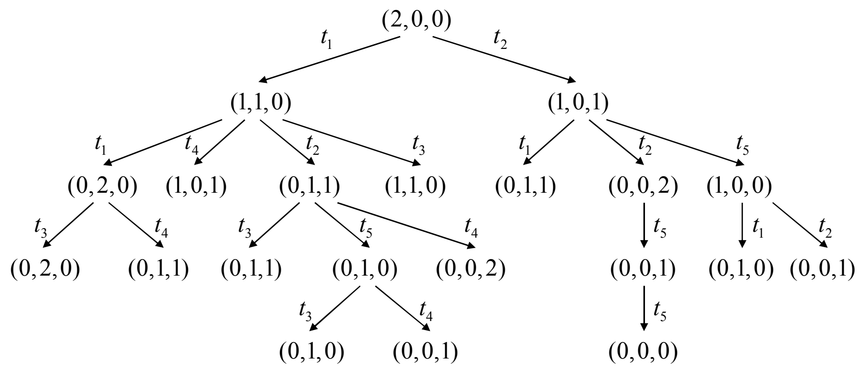
Primer izračuna dosegljivosti Petrijeve mreže

- Za podan Petrijev graf z začetno označitvijo (2,0,0) bomo izračunali dosegljivost.



Primer izračuna dosegljivosti Petrijeve mreže (nad.)

- Označitveni vektorji zapisani v drevesni strukturi.



N. Zimic 1-35

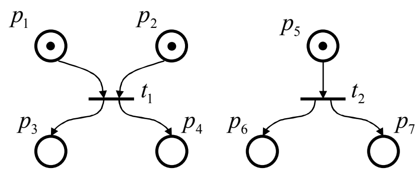
Značilnosti Petrijevih mrež

- Za Petrijevo mrežo velja:
  - vžig prehoda se izvede v idealnem času,
  - čas vžiga prehoda je logičen in ne absolutni čas,
  - v asinhronem primeru vžge prehod t_j takoj ko je izbran,
  - v sinhronem primeru vžge ko nastopi urin cikel.
- Če je izbranih več prehajanj istočasno se lahko:
  - izbere prehajanje glede na prioritetni sistem,
  - prehajanje se lahko izbere naključno,
  - če primer ni konflikten lahko vžge več prehajanj hkrati.

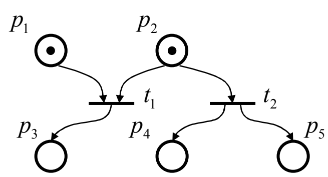
N. Zimic 1-36

Značilnosti Petrijevih mrež (nad.)

- Izsek Petrijevega grafa, ki ni konflikten:



- Konflikten primer Petrijevega grafa:

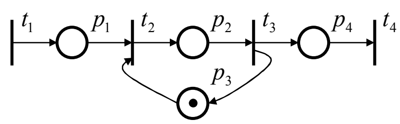


Modeliranje s Petrijevo mrežo

- Akcije v Petrijevi mreži se morajo odvijati pod določenimi pogoji.
- Akcije imenujemo tudi dogodke.
- Pogoje v kontroli dogodkov imenujemo kar pogoje.
- Pred izvrševanjem so predpogoji, po izvrševanju pa popogoji:
  - predpogoji: pogoji, ki morajo biti izpolnjeni, da se dogodek lahko izvrši,
  - popogoji: rezultat izvršitve dogodka.

Enostaven primer

- Enostaven primer modeliranja s Petrijevo mrežo:



t_1: prihod zahteve v sistem
t_2: začetek procesiranja
t_3: konec procesiranja
t_4: zahteva zapusti sistem

p_1: zahteva čaka v vrsti
p_2: procesiranje zahteve
p_3: naprava je prosta
p_4: zahteva je obdelana

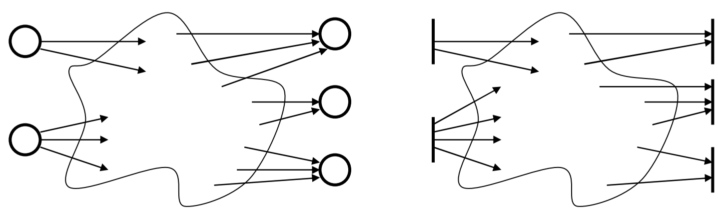
Enostaven primer (nad.)

- Tabela pogojev in popogojev za prejšnji primer:

Dogodki	Predpogoji	Popogoji
1		p_1
2	p_1, p_3	p_2
3	p_2	p_3, p_4
4	p_4	

Povezovanje Petrijevih mrež z zunanjim svetom

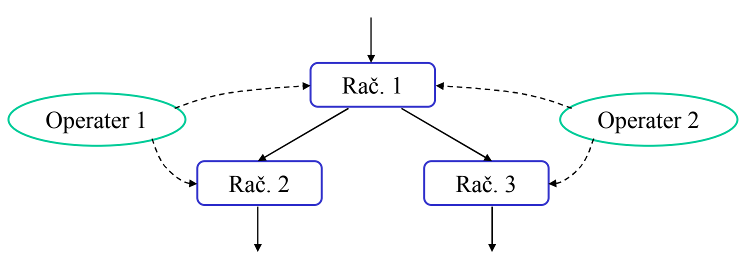
- Petrijeve mreže lahko se lahko z zunanjim svetom povezujejo na dva načina: preko mest in preko prehodov.



N. Zimic 1-41

Primer računalniškega sistema

- Računalniški sistem sestavljajo trije računalniki, ki jih poslužujeta dva operaterja. Zahteva se najprej postreže na prvem računalniku, za tem pa na drugem ali tretjem. Za izvajanje programa je potreben računalnik in operater.



N. Zimic 1-42

Primer računalniškega sistema (nad.)

- Pogoji (mesta):

a. program čaka na obdelavo na računalniku R_1,
b. program po obdelavi na R_1 čaka na obdelavo na R_2 ali R_3,
c. program je izvršen,
d. računalnik R_1 je prost,
e. računalnik R_2 je prost,
f. računalnik R_3 je prost,
g. operater O_1 je prost,
h. operater O_2 je prost,
i. operater O_1 poslužuje računalnik R_1,
j. operater O_2 poslužuje računalnik R_1,
k. operater O_1 poslužuje računalnik R_2,
l. operater O_2 poslužuje računalnik R_3,

Primer računalniškega sistema (nad.)

- Akcije - prehajanja v mreži:

1. program prispe v obdelavo,
2. operater O_1 začne z posluževanjem računalnika R_1,
3. operater O_1 konča z posluževanjem računalnika R_1,
4. operater O_2 začne z posluževanjem računalnika R_1,
5. operater O_2 konča z posluževanjem računalnika R_1,
6. operater O_1 začne z posluževanjem računalnika R_2,
7. operater O_1 konča z posluževanjem računalnika R_2,
8. operater O_2 začne z posluževanjem računalnika R_3,
9. operater O_2 konča z posluževanjem računalnika R_3,
10. obdelan program zapusti sistem.

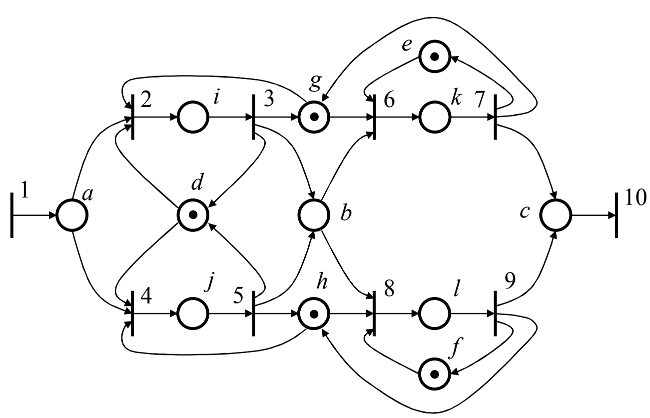
Primer računalniškega sistema (nad.)

- Tabela pogojev in popogojev za prejšnji primer:

Dogodki	Predpogoji	Popogoji
1		a
2	a, g, d	i
3	i	g, d, b,
4	a, h, d	j
5	j	b, h, d
6	b, g, e	k
7	k	c, g, e
8	b, f, h	l
9	l	c, f, g
10	c	

Primer računalniškega sistema (nad.)

- Označen Petrijev graf za primer računalniškega sistema:



Prevedba končnega avtomata v Petrijevo mrežo

- Končni avtomat A je petorček:

  $A = (X, Y, Z, \delta, \lambda)$
- Kjer so:

  X: končna neprazna množica vhodnih črk $\{x_1, x_2, ...\}$,
  Y: končna neprazna množica notranjih črk $\{y_1, y_2, ...\}$,
  Z: končna množica izhodnih črk $\{z_1, z_2, ...\}$,
  $\delta : Y \times X \rightarrow Y$ je funkcija naslednjega stanja,
  $\lambda : Y \times X \rightarrow Z$ je izhodna funkcija avotmata.

Prevedba končnega avtomata v Petrijevo mrežo (nad.)

- Petrijeva mreža, ki je ekvivalenta avtomatu A je definirana:

  $C = (P, T, I, O)$

  $P = X \cup Y \cup Z,$ množica mest Petrijeve mreže

  $T = \{t_{y,x} \mid y \in Y, x \in X\},$ množica prehodov

  $I(t_{y,x}) = \{y, x\},$ vhodne posplošene množice

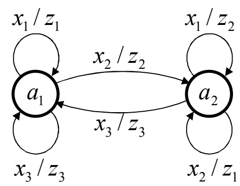
  $O(t_{y,x}) = \{\delta(y,x), \lambda(y,x)\},$ izhodne posplošene množice

Primer prevedbe avtomata v Petrijevo mrežo

- Podan je avotmat *A:*

$$A=(X,Y,Z,\delta,\lambda)$$
$$X=\{x_1,x_2,x_3\}$$
$$Y=\{a_1,a_2\}$$
$$Z=\{z_1,z_2,z_3\}$$

δ/λ	a_1	a_2
x_1	a_1/z_1	a_2/z_2
x_2	a_2/z_2	a_2/z_1
x_3	a_1/z_3	a_1/z_3



Primer prevedbe avtomata v Petrijevo mrežo (nad.)

- Petrijeva mreža *C*, ki je ekvivalenta avtomatu *A* je:

$$C=(P,T,I,O)$$

- Množica stanj *P* Petrijeve mreže:

$$P=X\cup Y\cup Z=\{x_1,x_2,x_3,a_1,a_2,z_1,z_2,z_3\}$$

- Množica prehodov *T* v Petrijevi mreži je:

$$T=\{t_{a_1,x_1},t_{a_1,x_2},t_{a_1,x_3},t_{a_2,x_1},t_{a_2,x_2},t_{a_2,x_3}\}$$
$$T=\{t_{11},t_{12},t_{13},t_{21},t_{22},t_{23}\}$$

Primer prevedbe avtomata v Petrijevo mrežo (nad.)

- Posplošene vhodne množice I so:

$$I(t_{11}) = \{a_1, x_1\} \qquad I(t_{21}) = \{a_2, x_1\}$$
$$I(t_{12}) = \{a_1, x_2\} \qquad I(t_{22}) = \{a_2, x_2\}$$
$$I(t_{13}) = \{a_1, x_3\} \qquad I(t_{23}) = \{a_2, x_3\}$$

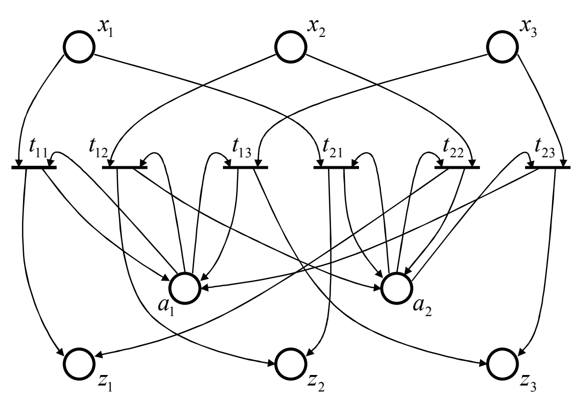
- Posplošene izhodne množice O so:

$$O(t_{11}) = \{a_1, z_1\} \qquad O(t_{21}) = \{a_2, z_2\}$$
$$O(t_{12}) = \{a_2, z_2\} \qquad O(t_{22}) = \{a_2, z_1\}$$
$$O(t_{13}) = \{a_1, z_3\} \qquad O(t_{23}) = \{a_1, z_3\}$$

N. Zimic 1-51

Primer prevedbe avtomata v Petrijevo mrežo (nad.)

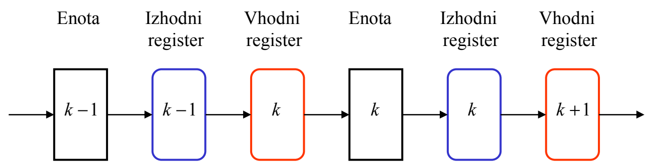
- Petrijev graf za podan primer:



N. Zimic 1-52

Modeliranje cevovoda

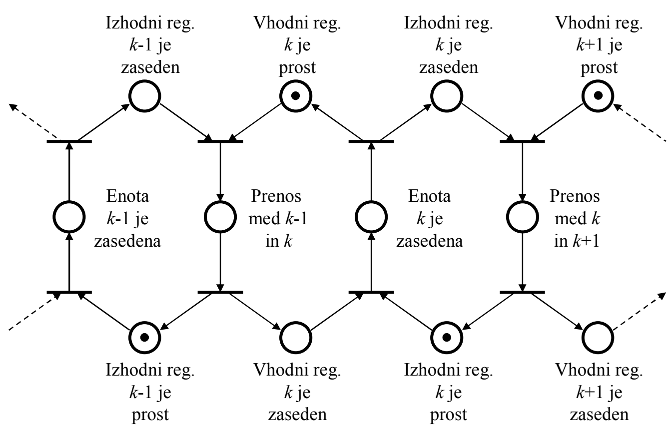
- Primer kontrolne enote, ki uporablja metodo cevovoda (pipeline).



N. Zimic 1-53

Modeliranje cevovoda (nad.)

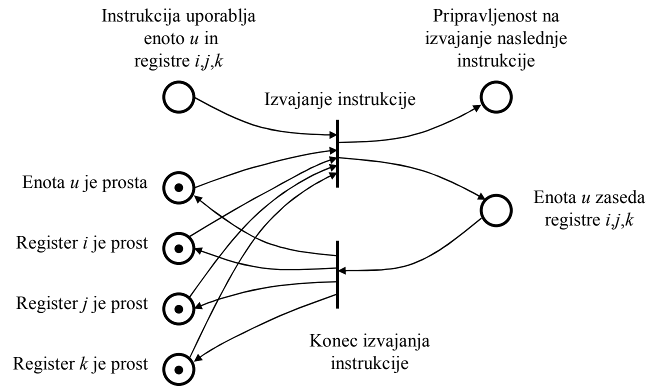
- Petrijev graf za primer kontrolne enote:



N. Zimic 1-54

Izvajanje instrukcije

- Izvajanje instrukcije, ki zaseda enoto *u* ter registre *i*,*j*,*k*.

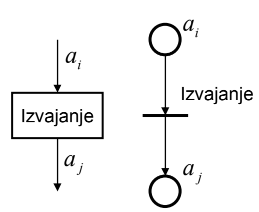


N. Zimic 1-55

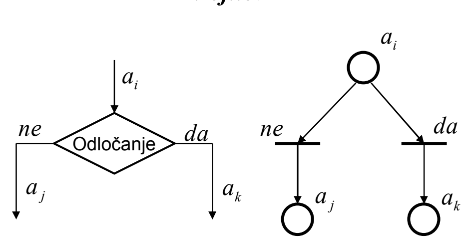
Uporaba Petrijevih mrež v programski opremi

- Programe v računalništvu sestavljajo dva osnovna gradnika: izvajalni operator in vejitev.
- Petrijev graf omenjenih gradnikov:

Izvajalni operator



Vejitev



N. Zimic 1-56

Primer programa

- Primer programa, ki ga bomo prevedli v Petrijevo mrežo:

```
begin
    Input (y1);
    Input (y2);
    y3 :=1;
    while y1>0 do begin
        if odd (y1) then begin
            y3 := y3*y2;
            y1 := y1 -1;
        end;
        y2 := y2*y2;
        y1 := y1 -2;
    end;
    Output (y3);
end;
```

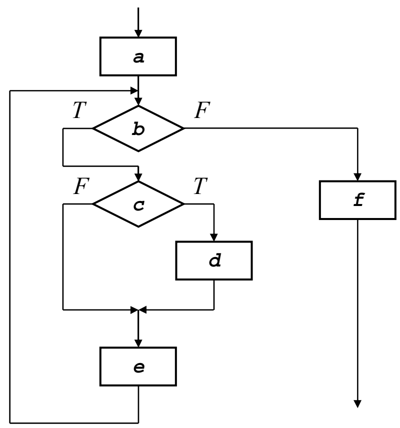

Primer programa (nad.)

- Akcije, ki se izvajajo v posameznem gradniku:

Akcija	Opis akcije
a	`Input (y1); Input (y2); y3 :=1;`
b	`y1>0`
c	`odd (y1)`
d	`y3 := y3*y2; y1 := y1 -1;`
e	`y2 := y2*y2; y1 := y1 -2č`
f	`Output (y3);`

Primer programa (nad.)

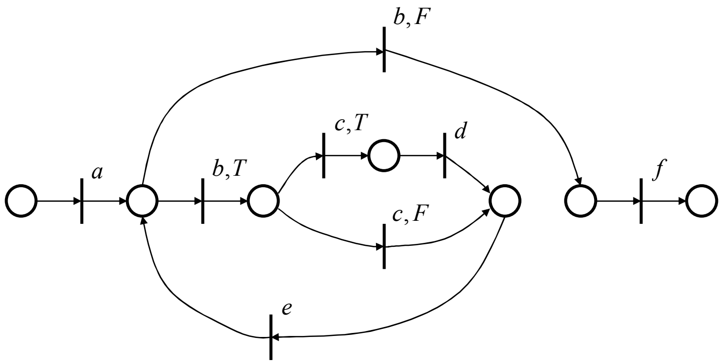
- Diagram poteka za podan primer:



N. Zimic 1-59

Primer programa (nad.)

- Petrijev graf za podan primer programa:



N. Zimic 1-60

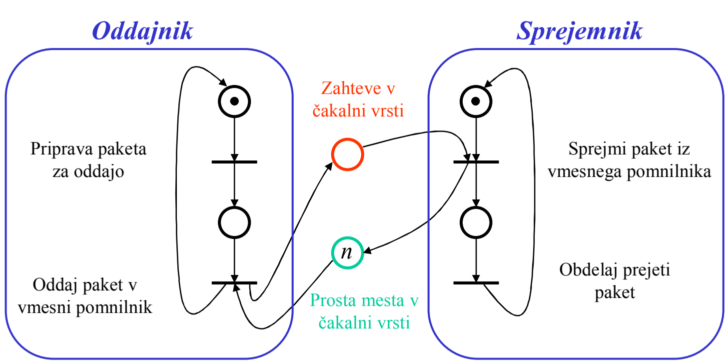
Sinhronizacija v Petrijevih mrežah

- Modeliranje sinhronizacije v Petrijevih mrežah se izvaja preko skupnih mest, kjer število žetonov v skupnem mestu pogojuje akcijo.
- Posamezni deli Petrijeve mreže , v primeru nekonfilknosti, se lahko izvajajo popolnoma ločeno. Konfliktnost pri izvajanju Petrijeve mreže se uporablja za sinhronizacijo posameznih neodvisnih procesov med seboj.

N. Zimic 1-61

Sinhronizacija v Petrijevih mrežah (nad.)

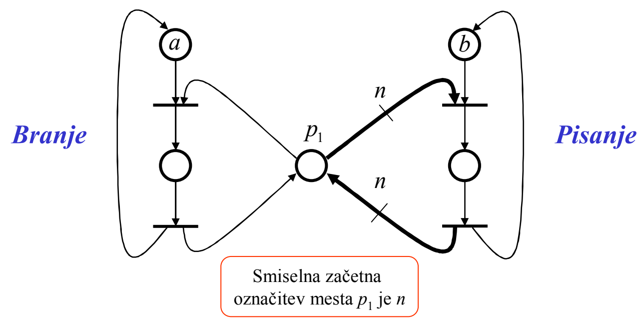
- Modeliranje sprejemnika in oddajnika z Petrijevim grafom:



N. Zimic 1-62

Sinhronizacija v Petrijevih mrežah (nad.)

- Modeliranje branja in pisanja v skupno bazo. Paralelno se lahko izvaja *n* branj in samo eno pisanje, ko branje ni v teku.



Matrični zapis Petrijeve mreže

- Petrijevo mrežo $C=(P,T,I,O)$ lahko opišemo tudi z dvema matrikama in sicer D^- in D^+, ki predstavljata vhodne in izhodne funkcije:

$$D^-[i,j] = \#(p_j, I(t_i))$$

$$D^+[i,j] = \#(p_j, O(t_i))$$

- Prehod je izbran (omogočen), če velja:

$$\boldsymbol{o} \geq e_j \cdot D^-$$

- e_j je enotni vektor, ki ima enico samo na mestu j.

$$e_j = [0,0,\ldots,1,\ldots,0]$$

Matrični zapis Petrijeve mreže (nad.)

- Če je prehod t_j izbran, lahko pride do vžiga le tega. Rezultat vžiga prehoda je:

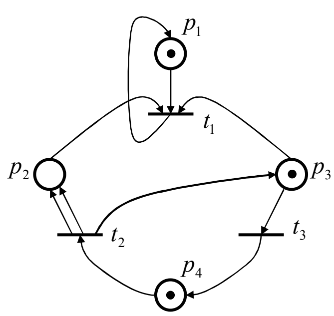
$$\delta(\boldsymbol{o}, t_j) = \boldsymbol{o} - e_j \cdot D^- + e_j \cdot D^+ =$$
$$= \boldsymbol{o} + e_j \cdot (-D^- + D^+) =$$
$$= \boldsymbol{o} + e_j \cdot D$$

- Pri čemer je matrika D:

$$D = D^+ - D^-$$

Primer matrični zapisa

- Podan je označen Petrijev graf na osnovi katerega sta izračunani matriki:



$$D^- = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D^+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Primer matrični zapisa (nad.)

- Označitveni vektor $\boldsymbol{o}$ in matrika D sta:

$$\boldsymbol{o} = (1,0,1,1)$$

$$D = D^{+} - D^{-} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Primer matrični zapisa (nad.)

- Pogoj za vžig prehodov t_1, t_2 in t_3:

$$\boldsymbol{o} \geq e_1 \cdot D^{-} = [1,0,0] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [1,1,1,0] \qquad \cancel{\surd}$$

$$\boldsymbol{o} \geq e_2 \cdot D^{-} = [0,1,0] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [0,0,0,1] \qquad \surd$$

$$\boldsymbol{o} \geq e_3 \cdot D^{-} = [0,0,1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [0,0,1,0] \qquad \surd$$

Primer matrični zapisa (nad.)

- V primeru vžiga t_2 je nova označitev:

$$\boldsymbol{o}' = \boldsymbol{o} + e_2 \cdot D = [1,0,1,1] + [0,1,0] \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= [1,0,1,1] + [0,2,1,-1] = [1,2,2,0]$$

N. Zimic 1-69

Primer matrični zapisa (nad.)

- Primer izrisa Petrijevega grafa na osnovi vhodne in izhodne matrike ter označitvenega vektorja:

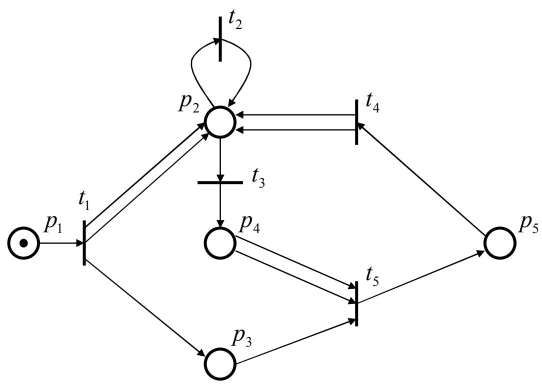
$$D^- = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad D^+ = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{o} = (1,0,0,0,0)$$

N. Zimic 1-70

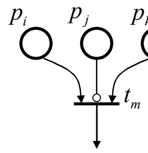
Primer matrični zapisa (nad.)

- Petrijev graf za podane podatke:



Razširitev Petrijevih mrež

- V Petrijeve mreže vpeljemo inhibicijski vhod, za katerega velja, da je mesto izbrano samo v primeru, ko mesto, ki je povezano na inhibicijski vhod, nima žetonov.
- Primer inhibicijskega vhoda:

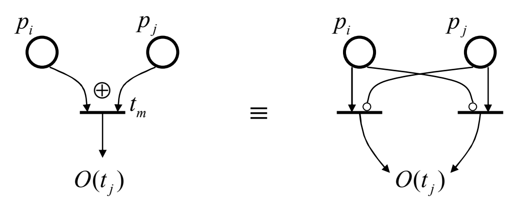


Pogoji, ki morajo biti izpolnjeni za vžig prehoda t_m so:

$$o(p_i) \geq 1$$
$$o(p_j) = 0$$
$$o(p_k) \geq 1$$

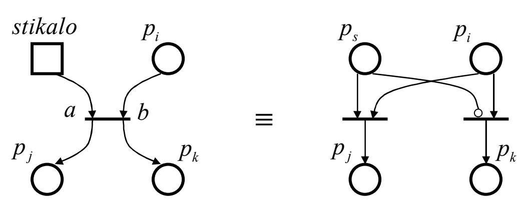
Razširitev Petrijevih mrež (nad.)

- Seštevanje po modulu dva (xor):



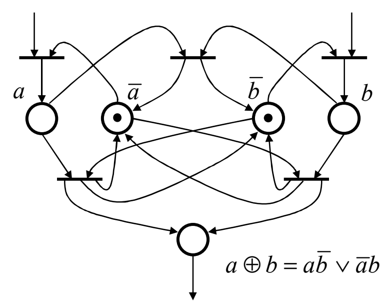
Razširitev Petrijevih mrež (nad.)

- Preklopniški vhod (stikalo - switch). Če stanje stikalo ni označeno in je izpolnjen pogoj za vžig bo rezultat izvajanja prenesen na stran *a*, sicer na stran *b*.



Razširitev Petrijevih mrež (nad.)

- Ker je inhibicijski vhod posebnost Petrijevih mrež se ga izogibamo. Izognemo se mu tako, da uvedemo mesto, ki ima označitev, ki je nasprotna opazovanemu mestu. Graf prikazuje vsoto po modulu dva.



N. Zimic 1-75

Modeliranje porazdeljenih procesov

- Porazdeljeno procesiranje lahko opišemo z grafom [Krop, Mler]:
  - procesorske enote so predstavljene s spojišči: $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_m\}$,
  - povezave prestavljajo poti za pošiljanje podatkov med procesorskimi enotami. Procesorske enote v_i in v_j sta med seboj povezani, če obstaja povezava $a_k=(v_i, v_j)$. Množica vseh povezav v grafu je $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_m\}$,
  - vsaki povezavi $a_k \in A$, ki ustreza paru $a_k=(v_i, v_j)$, pripada čakalna vrsta, ki je opisana s četvorčkom $(I_{ij}, V_{ij}, W_{ij}, T_{ij})$.

N. Zimic 1-76

Modeliranje porazdeljenih procesov (nad.)

- Elementi čakalne vrste (I_{ij}, V_{ij}, W_{ij}, T_{ij}) so:
  - I_{ij} - število podatkovnih enot (zahtev) v čakalni vrsti,
  - V_{ij} - število zahtev, ki se po izvršenem procesiranju v enoti v_i postavijo v izhodno vrsto,
  - W_{ij} - število zahtev, ki se po izvršenem procesiranju v enoti v_j odstranijo iz čakalne vrste,
  - T_{ij} - prag, pri katerem se lahko začne procesiranje (minimalno število zahtev v čakalni vrsti).

$$v_i \xrightarrow{(I_{ij}, V_{ij}, W_{ij}, T_{ij})} v_j$$

Modeliranje porazdeljenih procesov (nad.)

- Pogoj za izvršitev procesiranja je, da je število zahtev v čakalni vrsti večje ali enako pragu:

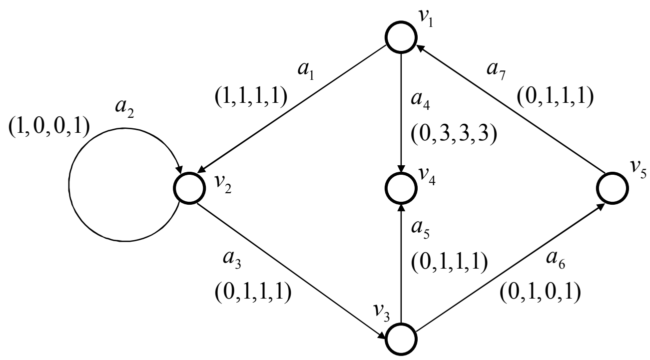
  $$I_{ij} \geq T_{ij}$$
- Po procesiranju procesorja v_i se poveča število zahtev v čakalni vrsti:

  $$I_{ij}' = I_{ij} + V_{ij}$$
- Po procesiranju procesorja v_j se zamnjša število zahtev v čakalni vrsti:

  $$I_{ij}' = I_{ij} - W_{ij}$$
- Smiseln prag za procesiranje W_{ij} je $W_{ij} \leq T_{ij}$.

Modeliranje porazdeljenih procesov (nad.)

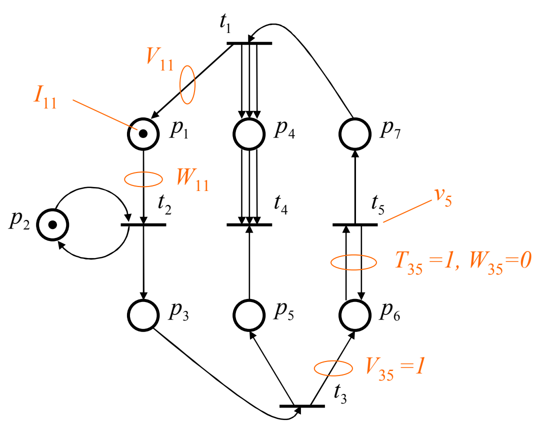
- Primer porazdeljenega sistema:



N. Zimic 1-79

Modeliranje porazdeljenih procesov (nad.)

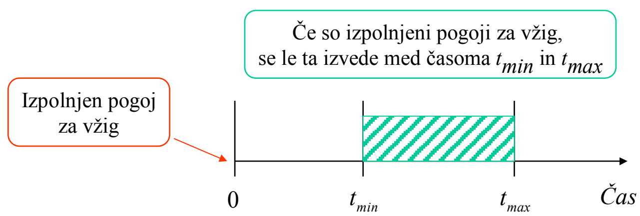
- Petrijev graf za primer porazdeljenega sistema:



N. Zimic 1-80

Časovne Petrijeve mreže

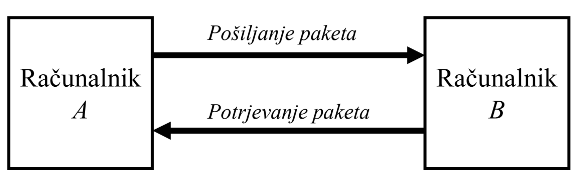
- Časovne Petrijeve mreže predstavljajo razširitev Petrijevh mrež.
- Čas je vpeljan kot časovno okno, v katerem se mora zgoditi vžig, od tega, ko je bil prehod izbran.
- Časovno okno je definirano s časoma t_{min} in $_{tmax}$.



N. Zimic 1-81

Časovne Petrijeve mreže (nad.)

- Primer uporabe Petrijeve mreže v računalniških komunikacijah.
- Računalnik A pošlje paket računalniku B. Ko ga le ta sprejme in obdela, ga potrdi in s tem omogoči ponovno pošiljanje paketa.



N. Zimic 1-82

Časovne Petrijeve mreže (nad.)

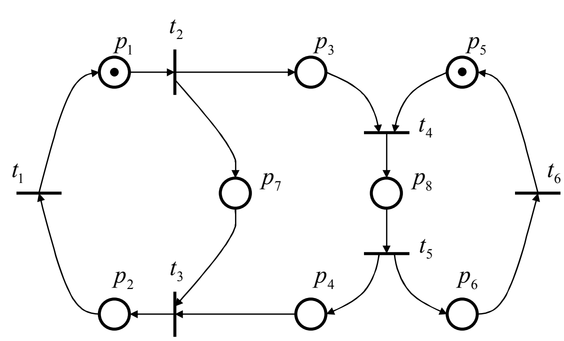
- Mesta v Petrijevi mreži za primer komunikacijskega protokola so:

p_1 - Računalnik A ima paketa za računalnik B
p_2 - Računalnik A informira svoj proces, da je bil paket poslan
p_3 - Računalnik A informira računalnik B, da mu je bil paket poslan
p_4 - Računalnik B potrdi računalniku A prejem paketa
p_5 - Računalnik B je pripravljen sprejeti blok
p_6 - Računalnik B informira svoj proces, da je bil paket sprejet
p_7 - Računalnik A pričakuje od računalnika B potrditev sprejema
p_8 - Računalnik B je sprejel blok

N. Zimic 1-83

Časovne Petrijeve mreže (nad.)

- Petrijev graf za primer komunikacijskega protokola:



N. Zimic 1-84

Časovne Petrijeve mreže (nad.)

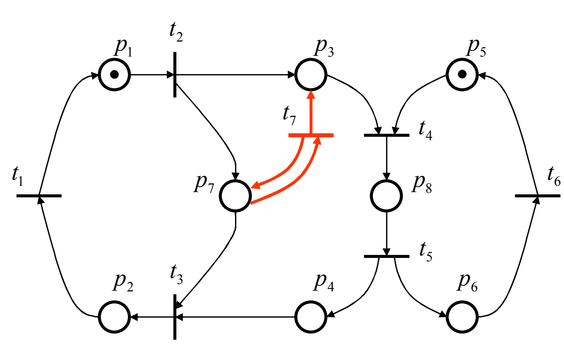
- Problem nastane, če računalnik B ne sprejme paketa, oziroma se le ta na poti izgubi. V tem primeru je potrebno ponovno poslati paket.
- Paket se ponovno pošlje z uvedbo prehoda t_7, ki mora vžgati, ko ni potrditve paketa v predvidenem času.
- Minimalni čas vžiga za prehod t_7 mora biti daljši od časa, ki je potreben za potrditev:

$$t_{7min} > t_{4max} + t_{3max} + t_{5max}$$

N. Zimic 1-85

Časovne Petrijeve mreže (nad.)

- Petrijev graf za primer komunikacijskega protokola, kjer je dodan prehod t_7, ki omogoča ponovno pošiljanje paketov.



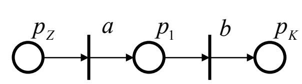
N. Zimic 1-86

Jezik Petrijevh mrež

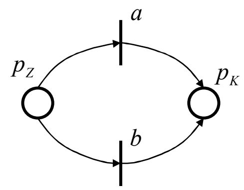
- Jezik Petrijevih mrež sestavljajo vse besede, ki so rezultat izvajanja Petrijeve mreže, od začetne označitve do končne označitve.
- Začetna označitev Petrijeve mreže ima samo en žeton v mestu, ki je določeno kot začetno in vsa ostala mesta brez žetonov.
- Končna označitev Petrijeve mreže ima samo en žeton v mestu, ki je določeno kot končno in vsa ostala mesta brez žetonov.
- Besede Petrijeve mreže so sestavljene iz črk, ki so rezultat vžiga posameznega prehoda v Petrijevi mreži.

Jezik Petrijevh mrež (nad.)

- Primeri jezikov, ki so rezultat Petrijeve mreže:



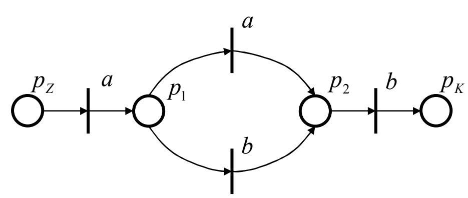
$$L(C_1) = ab$$



$$L(C_2) = a + b$$

Jezik Petrijevh mrež (nad.)

- Primeri jezikov, ki so rezultat Petrijeve mreže:

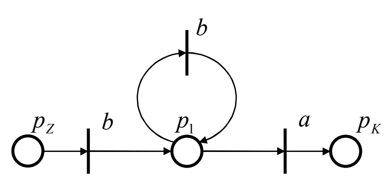


$$L(C_1) = a(a+b)b$$

N. Zimic 1-89

Jezik Petrijevh mrež (nad.)

- Primeri jezikov, ki so rezultat Petrijeve mreže:

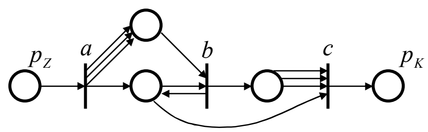


$$L(C_1) = b^+a$$

N. Zimic 1-90

Jezik Petrijevh mrež (nad.)

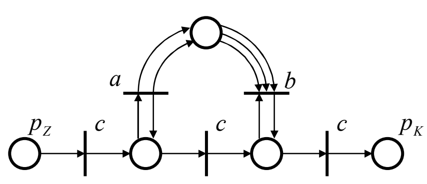
- Primeri jezikov, ki so rezultat Petrijeve mreže:



$$L(C) = ab^3c$$

Jezik Petrijevh mrež (nad.)

- Primeri jezikov, ki so rezultat Petrijeve mreže:



$$L(C) = ca^{3n}cb^{2n}c, \quad n \geq 0$$

Markovske verige

N. Zimic

Stohastični proces

- Stohastični proces je definiran nad množico naključnih spremenljivk $\{X_t : t \in T\}$, kjer je vsaka naključna spremenljivka X_t, indeksirana s parametrom $t \in T$.
- Parameter $t \in T$ se običajno poimenuje tudi časovni parameter, če je $T \subseteq \mathbb{R}_+ = [0,\infty)$.
- Množica vseh naključnih spremenljivk $X(t)$ (za vsak $t \in T$) se imenuje prostor stanj stohastičnega procesa.
- Takšen proces imenujemo časovno zvezni stohastični proces.

Stohastični proces (nad.)

- Če je stohastični proces definiran nad množico naključnih spremenljivk $\{X_n : n \in \mathbb{N}_0\}$, kjer je vsaka naključna spremenljivka X_n, indeksirana s parametrom n, potem takšen proces imenujemo časovno diskreten stohastični proces.

Stohastični proces (nad.)

- Stohastični proces se lahko opiše s porazdelitveno funkcijo $F_X(\boldsymbol{s};\boldsymbol{t})$ za podan nabor naključnih spremenljivk $\{X(t_1), X(t_2), ..., X(t_n)\}$, pri čemer je vektor $\boldsymbol{t} = (t_1, t_2, ..., t_n) \in \mathbb{R}$ in $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, ..., s_n) \in \mathbb{R}^n$ prostor stanj, kjer je $t_1 < t_2 < ... < t_n$:

$$F_X(\boldsymbol{s};\boldsymbol{t}) = P[X(t_1) \le s_1, X(t_2) \le s_2, ..., X(t_n) \le s_n]$$

- Gostota verjetnosti je v tem primeru:

$$f_X(\boldsymbol{s};\boldsymbol{t}) = \frac{\partial^n F_X(\boldsymbol{s};\boldsymbol{t})}{\partial s_1 \partial s_2 ... \partial s_n}$$

Markovski proces

- Stohastični proces $\{X_t : t \in T\}$ je Markovski proces, če je za vse $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n < t_{n+1}$ in $s_i \in S$ pogojna porazdelitvena funkcija $X_{t_{n+1}}$ spremenljivk odvisna samo od predzadnje spremenljivke $X(t_n)$ in ne od $X(t_0), X(t_1), ..., X(t_{n-1})$:

$$P[X(t_{n+1}) \le s_{n+1} \mid X(t_n) = s_n, X(t_{n-1}) = s_{n-1}, ..., X(t_0) = s_0] =$$
$$= P[X(t_{n+1}) \le s_{n+1} \mid X(t_n) = s_n]$$

- To pomeni, da je Markovski proces stohastični proces brez pomnjenja.

Časovna homogenost

- Markovski proces je časovno homogen, če verjetnostna porazdelitev naključne spremenljivke $X(t_{n+1})$ ni odvisna od trenutnega opazovanega časa. Če je naključna spremenljivka invariantna za $t(n)$, je potem tudi časovno homogena.

$$P[X(t_{n+1}) \le s_{n+1} \mid X(t_n) = s_n] = P[X(t_{n+1} - t_n) \le s_{n+1} \mid X(t_0) = s_n]$$

Časovno diskretni Markovski proces

- Diskretni Markovski proces je definiran nad diskretnim končnim ali števno neskončnim prostorom stanj *S*.
- Časovno diskretni Markovski proces je definiran nad diskretnim prostorom *T*, kjer je $T \subseteq \mathbb{N}_o$.

N. Zimic 2-7

Časovno diskretni Markovski proces (nad.)

- Za podan stohastični proces $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n+1}, \ldots\}$, za opazovane točke *0,1,...,n+1*, prestavlja diskretni Markovski proces, kjer za vse $n \in \mathbb{N}_0$ in $s_i \in S$ velja:

$$P[X_{n+1} = s_{n+1} \mid X_n = s_n, X_{n-1} = s_{n-1}, \ldots, X_0 = s_0] = \\ = P[X_{n+1} = s_{n+1} \mid X_n = s_n]$$

- To pomeni, da je diskretni Markovski proces stohastični proces brez pomenjenja.

N. Zimic 2-8

Prehajanja v Markovski verigi

- Privzemimo, da so stanja Markovske verige $S = \{0,1,2,...\}$. Verjetnost prehoda med stanjem s_n in stanjem s_{n+1} lahko zapišemo kot pogojno verjetnost:

$$p_{ij}^{(1)}(n) = P[X_{n+1} = s_{n+1} = j \mid X_n = s_n = i]$$

- Indeksa *i* in *j* pomenita prehod med stanji *i* in *j*. Eksponent (*1*) predstavlja en korak (v času *n* in *n+1*), parameter (*n*) pa pomeni časovni korak *n*.

Prehajanja v časovno homogeni Markovski verigi

- Za časovno homogeno Markovsko verigo velja, da je neodvisna od trenutnega časa. Tako lahko verjetnost prehoda med stanjema *i* in *j* zapišemo:

$$p_{ij}^{(1)} = p_{ij}^{(1)}(n) = P[X_{n+1} = j \mid X_n = i] = P[X_1 = j \mid X_0 = i]$$

$$\forall n \in T$$

- Zaradi lažjega zapisa bomo eksponent za samo en korak izpuščali:

$$p_{ij} = p_{ij}^{(1)}$$

Matrični zapis

- Verjetnost prehoda v enem koraku med stanji lahko zapišemo tudi v matrični obliki:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}^{(1)} = [p_{ij}] = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \vdots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \vdots \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots \end{bmatrix}$$

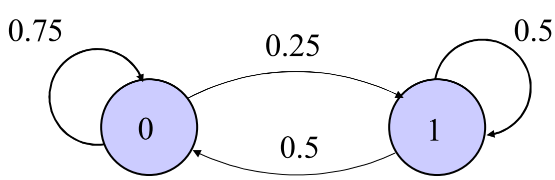
- Vsota verjetnosti v vrstici je enaka 1:

$$\sum_{j \in S} p_{ij} = 1, \qquad 0 \le p_{ij} \le 1$$

Primer Markovske verige

- Markovska veriga z dvema stanjema je podana z matriko ter sliko:

$$\mathbf{P}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$



Verjetnost prehoda po *n* korakih

- Verjetnost prehoda iz stanja i v času k v stanje j v času l, kjer je med k in l n časovnih korakov, je:

$$p_{ij}^{(n)}(k,l) = P[X_l = j \mid X_k = i], \qquad 0 \le k \le l$$

- Vsota vseh verjetnosti prehodov, ki zapuščajo stanje i, je:

$$\sum_{j \in S} p_{ij}^{(n)}(k,l) = 1, \qquad 0 \le p_{ij}^{(n)}(k,l) \le 1$$

Chapman-Kolmogorov teorem

- Verjetnost prehoda med stanjema i in j v časovno nehomogeni Markovski verigi, je podana z enačbo:

$$p_{ij}^{(n)}(k,l) = \sum_{h \in S} p_{ih}^{(m-k)}(k,m) p_{hj}^{(l-m)}(m,l), \qquad 0 \le k < m < l$$

- Spremenljivka k predstavlja začetni in l končni čas, oziroma korak v Markovski verigi. Vseh korakov je n:

$$n = l - k$$

Chapman-Kolmogorov teorem (nad.)

- Verjetnost prehoda med stanjema *i* in *j* v časovno homogeni Markovski verigi se poenostavi:

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{h \in S} p_{ih}^{(m)} p_{hj}^{(n-m)}, \qquad 0 < m < n$$

- V primeru $m = 1$ iz zgornje enačbe sledi:

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{h \in S} p_{ih}^{(1)} p_{hj}^{(n-1)}$$

- Zapis z matrikami:

$$\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^{(1)}\mathbf{P}^{(n-1)} = \mathbf{P}\mathbf{P}^{(n-1)}$$

Vektor stanj Markovske verige

- Verjetnost, da je Markovska veriga v koraku *n* v stanju *i,* lahko zapišemo:

$$v_i(n) = P[X_n = i]$$

- Na osnovi prej zapisane verjetnosti lahko zapišemo vektor stanj Markovske verige:

$$\boldsymbol{v}(n) = (v_0(n), v_1(n), v_2(n), \ldots)$$

- Za vektor verjetnosti velja:

$$\sum_{i \in S} v_i = 1$$

Vektor stanj Markovske verige (nad.)

- Vektor stanj Markovske verige v časovnem koraku *n* lahko zapišemo:

$$\boldsymbol{\nu}(n) = \boldsymbol{\nu}(0)\mathbf{P}^{(n)} = \boldsymbol{\nu}(n-1)\mathbf{P}$$

- Na osnovi prej zapisane verjetnosti lahko zapišemo vektor stanj Markovske verige:

$$\boldsymbol{\nu}(n) = (\nu_0(n), \nu_1(n), \nu_2(n), \ldots)$$

N. Zimic 2-17

Stacionarno stanje Markovske verige

- Stacionarno stanje Markovske verige je opredeljeno kot:

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{\nu}(n) = \tilde{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu}(n-1)\mathbf{P} = \tilde{\boldsymbol{\nu}}\,\mathbf{P}$$

- Ko je doseženo stacionarno stanje, se verjetnost posameznega stanja ne spreminja več.

N. Zimic 2-18

Stacionarno stanje Markovske verige (nad.)

- Stacionarno stanje Markovske verige lahko zapišemo kot:

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{\nu}(n) = \tilde{\boldsymbol{\nu}} = \lim_{n\to\infty}(\boldsymbol{\nu}(0)\mathbf{P}^n) = \boldsymbol{\nu}(0)\tilde{\mathbf{P}}$$

- Lastnost matrike prehajanja stanj za neskončno korakov je:

$$\tilde{\mathbf{P}} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n = \begin{bmatrix} \tilde{\nu}_0 & \tilde{\nu}_1 & \tilde{\nu}_2 & \vdots \\ \tilde{\nu}_0 & \tilde{\nu}_1 & \tilde{\nu}_2 & \vdots \\ \tilde{\nu}_0 & \tilde{\nu}_1 & \tilde{\nu}_2 & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots \end{bmatrix}$$

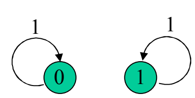
- Izračun stacionarnega stanja ni vedno možen!

N. Zimic 2-19

Stacionarno stanje - primeri

- Primer Markovske verige, kjer enoličen izračun stacionarnega stanja ni možen:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



- Matrika prehodov v neskončnosti je kar enaka osnovni matriki. Enolično stacionarno stanje ne obstaja in je kar enako začetnemu vektorju.

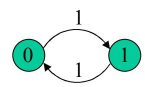
$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n = \tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \tilde{\nu} = \nu(0)\tilde{\mathbf{P}} = \nu(0)$$

N. Zimic 2-20

Stacionarno stanje – primeri (nad.)

- Primer Markovske verige, kjer enoličen izračun stacionarnega stanja ni možen:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$



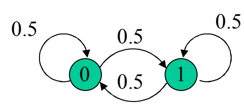
- Matrika prehodov $\mathbf{P}^{(n)}$, ko gre n proti neskončno, ne konvergira.

N. Zimic 2-21

Stacionarno stanje – primeri (nad.)

- Primer Markovske verige, kjer je izračun stacionarnega stanja možen:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$



- Matrika prehodov $\mathbf{P}^{(n)}$, ko gre n proti neskončno, konvergira in stacionarno stanje obstaja:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^{(\mathbf{n})} = \tilde{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \qquad \tilde{v} = v(0)\tilde{\mathbf{P}} = [0.5, 0.5]$$

N. Zimic 2-22

Verjetnost povratka

- Pogojna verjetnost, da Markovska veriga začne v stanju *i* po *n*>1 korakih prvič doseže stanje *j,* je:

$$f_{ij}^{(n)} = P[X_0 = i, X_1 \neq j, ..., X_{n-1} \neq j, X_n = j]$$

- Pogojna verjetnost, da Markovska veriga začne v stanju *i* in po *n* >1 korakih prvič doseže stanje *i,* je:

$$f_{ii}^{(n)} = P[X_0 = i, X_1 \neq i, ..., X_{n-1} \neq i, X_n = i]$$

N. Zimic 2-23

Verjetnost povratka (nad.)

- Pogojna verjetnost, da se Markovska veriga v isto stanje vrne v poljubnem številu korakov, je:

$$f_{ii} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)}$$

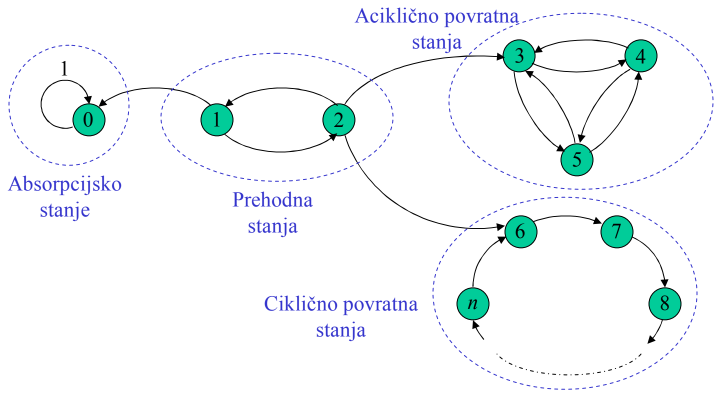
- Povprečno število korakov za vrnitev v isto stanje:

$$m_i = \sum_{n=1}^{\infty} n\, f_{ii}^{(n)}$$

N. Zimic 2-24

Opredelitev stanj

- Stanja Markovske verige so lahko: absorpcijska, prehodna, ciklično povratna in neciklično povratna.



Opredelitev stanj (nad.)

- Absorpcijsko stanje je stanje, katerega verjetnost povratka v enem koraku je 1. Ko sistem pride v to stanje, iz njega ne more več.
- Prehodno stanje je stanje, za katerega obstaja pozitivna verjetnost, da se vanj sistem nikoli več ne vrne. Velja tudi, da je verjetnost povratka manjša od 1:

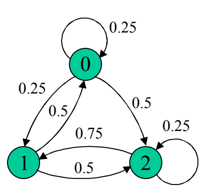
$$f_{ii} < 1$$

Opredelitev stanj (nad.)

- Aciklično povratna stanja so stanja, kjer je verjetnost vrnitve $f_{ii} = 1$ in število korakov do vrnitve ni točno določeno.
- Ciklično povratna stanja so stanja, kjer se isto stanje doseže po točno določenem številu korakov. Za sliko na prejšnji prosojnici je cikel $d = n$ - 5 korakov. Verjetnost vrnitve je $f_{ii}^{(d)} = 1$, kjer d velikost cikla v časovnih korakih.

Primer časovno diskretnega sistema

- Na sliki je podan primer grafa s tremi stanji in matrika verjetnosti prehodov:



$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.25 & 0.50 \\ 0.50 & 0 & 0.50 \\ 0 & 0.75 & 0.25 \end{bmatrix}$$

Primer časovno diskretnega sistema (nad.)

- Za stacionarno stanje velja: $\tilde{\boldsymbol{\nu}} = \tilde{\boldsymbol{\nu}}\mathbf{P}$ in $\sum_{i \in S} \nu_i = 1$
- Iz česar sledi sistem enačb:

$$\nu_0 = 0.25\nu_0 + 0.50\nu_1 + 0.00\nu_2$$
$$\nu_1 = 0.25\nu_0 + 0.00\nu_1 + 0.75\nu_2$$
$$\nu_2 = 0.50\nu_0 + 0.50\nu_1 + 0.25\nu_2$$
$$\nu_0 + \nu_1 + \nu_2 = 1$$

- Rešitev sistema enačb (stacionarna stanja) so:

$$\nu_0 = 0.24 \quad \nu_1 = 0.36 \quad \nu_2 = 0.40$$
$$\tilde{\nu} = (0.24, 0.36, 0.40)$$

Časovno zvezni Markovski proces

- Podan stohastični proces $\{\boldsymbol{X}_t : t \in T\}$, je časovno zvezen Markovski proces, če za $t_i \in \mathbb{R}_0^+$ kjer je $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < t_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$ in so stanja $\forall s_i \in S = \mathbb{N}_0$ ter velja pogojna verjetnost:

$$P[X(t_{n+1}) = s_{n+1} \mid X(t_n) = s_n, X(t_{n-1}) = s_{n-1}, \ldots, X(t_0) = s_0] =$$
$$= P[X(t_{n+1}) = s_{n+1} \mid X(t_n) = s_n]$$

- To pomeni, da je zvezni Markovski proces stohastični proces brez pomenjenja.

Prehajanja v časovno zvezni Markovski verigi

- Verjetnost prehoda iz stanja i v stanje j v časovnem intervalu $[u,v)$, kjer je $u,v \in T$ in $u < v$, je:

$$p_{ij}(u,v) = P[X(v) = j \mid X(u) = i]$$

- Po definiciji je pri $u = v$:

$$p_{ij}(u,u) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Chapman-Kolmogorov teorem

- Verjetnost prehoda med stanjema i in j v časovnem intervalu $[u,v)$ za časovno zvezne Markovske verige je:

$$p_{ij}(u,v) = \sum_{k \in S} p_{ik}(u,w) p_{kj}(w,v), \qquad 0 \leq u \leq w < v$$

- Verjetnost prehodov lahko zapišemo z matriko:

$$\mathbf{H}(u,v) = [p_{ij}(u,v)]$$

- Chapman-Kolmogorov teorem v matričnem zapisu:

$$\mathbf{H}(u,v) = \mathbf{H}(u,w)\,\mathbf{H}(w,v), \quad 0 \leq u \leq w < v$$

Časovno homogene Markovske verige

- Za časovno homogene zvezne Markovske verige velja, da je verjetnost prehoda odvisna samo od razlike časov $t = u - v$ in ne od absolutnih časov u in v:

$$p_{ij}(t) = p_{ij}(0,t) = P[X(u+t) = j \mid X(u) = i] =$$
$$P[X(t) = j \mid X(0) = i], \quad \forall u \in T$$

N. Zimic 2-33

Vektor stanj v časovno zveznih Markovskih verigah

- Stanje v časovno zvezni Markovski verigi je:

$$\pi_j(v), \quad j \in S$$

- In vektor stanj:

$$\boldsymbol{\pi}(u) = (\pi_1(u), \pi_2(u), \pi_3(u), \ldots)$$

N. Zimic 2-34

Vektor stanj v časovno zveznih Markovskih verigah (nad.)

- Stanje v časovno zvezni Markovski verigi v času v je:

$$\pi_j(v) = \sum_{i \in S} \pi_i(u)\, p_{ij}(u,v), \quad \forall u,v \in T \quad (u \le v)$$

- V vektorskem zapisu:

$$\boldsymbol{\pi}(v) = \boldsymbol{\pi}(u)\, \mathbf{P}(u,v), \quad \forall u,v \in T \quad (u \le v)$$

N. Zimic 2-35

Vektor stanj v časovno zveznih Markovskih verigah (nad.)

- Stanje v časovno homogeni zvezni Markovski verigi v času v je:

$$\pi_j(t) = \sum_{i \in S} \pi_i(0)\, p_{ij}(0,t) = \sum_{i \in S} \pi_i(0)\, p_{ij}(t)$$

- V vektorskem zapisu:

$$\boldsymbol{\pi}(t) = \boldsymbol{\pi}(0)\, \mathbf{P}(0,t) = \boldsymbol{\pi}(0)\, \mathbf{P}(t)$$

N. Zimic 2-36

Infinitezimalni generator

- Za časovno diskretno Markovsko verigo velja:

$$\mathbf{H}(m,n) = \mathbf{H}(m,n-1)\mathbf{P}(n-1)$$

$$\mathbf{H}(m,n) - \mathbf{H}(m,n-1) = \mathbf{H}(m,n-1)\mathbf{P}(n-1) - \mathbf{H}(m,n-1) = \\ = \mathbf{H}(m,n-1)(\mathbf{P}(n-1) - \mathbf{I})$$

- Če obe strani delimo z velikostjo koraka in če korak limitira proti 0 ($\Delta t \to 0$):

$$\mathbf{Q}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{P}(t, t+\Delta t) - \mathbf{I}}{\Delta t}$$

N. Zimic 2-37

Infinitezimalni generator (nad.)

- Odvisnost matrike $\mathbf{H}(s,t)$ po času lahko zapišemo:

$$\frac{\partial \mathbf{H}(s,t)}{\partial t} = \mathbf{H}(s,t)\mathbf{Q}(t), \quad s \le t$$

- Pri čemer se $\mathbf{Q}(t)$ imenuje infinitezimalni generator:

$$\mathbf{Q}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{P}(t, t+\Delta t) - \mathbf{I}}{\Delta t}$$

N. Zimic 2-38

Infinitezimalni generator (nad.)

- Elementi matrike $\mathbf{Q}(t)$ so:

$$q_{ii}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_{ii}(t, t+\Delta t) - 1}{\Delta t}$$

$$q_{ij}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_{ij}(t, t+\Delta t)}{\Delta t}, \quad i \neq j$$

- Če limite obstajajo in velja $\sum_{j \in S} p_{ij}(t, t+\Delta t) = 1$, potem sledi:

$$\sum_{j \in S} q_{ij}(t) = 0, \quad \forall i \in S$$

N. Zimic 2-39

Infinitezimalni generator (nad.)

- Za časovno homogene Markovske verige velja:

  $q_{ij} = q_{ij}(t), \quad \forall i, j \in S$

- Sprememba vektorja stanj po času je:

$$\frac{d\pi_j(t)}{dt} = \sum_{i \in S} q_{ij} \pi_i(t), \quad \forall j \in S$$

- V matričnem zapisu:

$$\dot{\boldsymbol{\pi}}(t) = \frac{d\boldsymbol{\pi}(t)}{dt} = \boldsymbol{\pi}(t)\mathbf{Q}$$

N. Zimic 2-40

Infinitezimalni generator (nad.)

- Za časovno homogene Markovske verige velja:

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \frac{d\mathbf{P}(t)}{dt} = \mathbf{P}(t)\,\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\,\mathbf{P}(t)$$

N. Zimic 2-41

Stacionarna stanja

- Za stacionarna stanja velja:
  - Neodvisna od časa t
  - Neodvisna od začetnega vektorja $\boldsymbol{\pi}(0)$
  - Strogo pozitivno $\pi_i > 0$
  - Za katere velja:

$$\pi_i = \lim_{t\to\infty} \pi_i(t)$$

- Velja tudi limita:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\pi_i(t)}{dt} = 0$$

N. Zimic 2-42

Stacionarna stanja (nad.)

- Iz prejšnjih enačb sledi:

$$0 = \sum_{i \in S} q_{ij} \pi_i, \quad \forall j \in S$$

- V matrični obliki:

$$0 = \boldsymbol{\pi} \mathbf{Q}$$

- Ker je vsota verjetnosti vseh stanj 1, sledi:

$$\boldsymbol{\pi} \mathbf{1} = \sum_{i \in S} \pi_i = 1, \quad \mathbf{1} = [1, 1, \ldots, 1]^T$$

N. Zimic 2-43

Globalno ravnotežje

- Za časovno homogene Markovske verige velja:

$$i, j \in S \quad q_{jj} = -\sum_{i, i \neq j} q_{ji}$$

- Iz česar sledi:

$$\sum_{i, i \neq j} q_{ij} \pi_i = -q_{jj} \pi_j$$

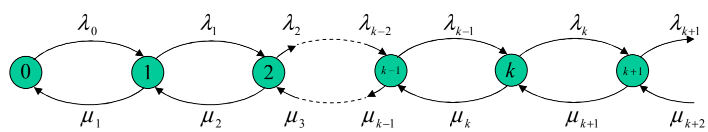
- Kar daje enačbo za globalno ravnotežje:

$$\sum_{i, i \neq j} q_{ij} \pi_i = \pi_j \sum_{i, i \neq j} q_{ji}$$

N. Zimic 2-44

Rojstno smrtni sistem

- Rojstno smrtni proces je tisti proces, kjer je prehajanje možno samo med sosednjimi stanji:
  - iz stanja k v stanje $k+1$ imenujemo porojevanje zahtev
  - iz stanja k v stanje $k-1$ imenujemo umiranje zahtev
- Intenzivnosti prehajanja:
  - λ_k : intenzivnost porojevanja zahtev
  - μ_k : intenzivnost umiranja zahtev



N. Zimic 2-45

Rojstno smrtni sistem (nad.)

- Intenzivnosti prehajanja med stanji (elementi matrike **Q)** so:

$$q_{k,k+1} = \lambda_k$$
$$q_{k,k-1} = \mu_k$$
$$q_{k,j} = 0, \quad |k-j| > 1$$

- Na osnovi znanih izrazov, je za ergodični (vsa stanja morajo biti pozitivno periodično povratna) primer sistema:

$$\sum_{j \in S} q_{k,j} = 0$$

N. Zimic 2-46

Rojstno smrtni sistem (nad.)

- Iz prejšnjega izraza sledi:

$$q_{k,k-1} + q_{k,k} + q_{k,k+1} = 0$$
$$q_{k,k} = -(q_{k,k-1} + q_{k,k+1}) = -(\mu_k + \lambda_k)$$

- Matrika **Q** je:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu_1 & -(\mu_1+\lambda_1) & \lambda_1 & 0 & \cdots \\ 0 & \mu_2 & -(\mu_2+\lambda_2) & \lambda_2 & \cdots \\ 0 & 0 & \mu_3 & -(\mu_3+\lambda_3) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Verjetnost stanja

- Verjetnost stanja k v rojstno smrtnem sistemu je:

$$\pi_k(t) = P[X(t) = k]$$

- Možni dogodki v času $(t,t+\Delta t)$ so:
  - v času t pri populaciji k in v intervalu $(t,t+\Delta t)$ ni nobene spremembe
  - v času t pri populaciji k in v intervalu $(t,t+\Delta t)$ se porodi nova zahteva
  - v času t pri populaciji k in v intervalu $(t,t+\Delta t)$ pride do smrti zahteve

Verjetnost stanja (nad.)

- Na osnovi naštetih dogodkov sledi:

$$\pi_k(t+\Delta t) = \pi_k(t)p_{k,k}(\Delta t) + \pi_{k-1}(t)p_{k-1,k}(\Delta t) + \pi_{k+1}(t)p_{k+1,k}(\Delta t) + o(\Delta t)$$

- V primeru $k = 0$:

$$\pi_0(t+\Delta t) = \pi_0(t)p_{0,0}(\Delta t) + \pi_1(t)p_{1,0}(\Delta t) + o(\Delta t)$$

- Funkcija $o(\Delta t)$ je funkcija, za katero velja:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$$

N. Zimic 2-49

Verjetnost stanja (nad.)

- Za časovno homogene Markovske verige velja, da je porojevanje in umiranje statistično neodvisno:
  - P[natančno eno rojstvo v času Δt, pri populaciji k] = $\lambda_k \Delta t + o(\Delta t)$
  - P[natančno ena smrt v času Δt, pri populaciji k] = $\mu_k \Delta t + o(\Delta t)$
  - P[natančno nobenega rojstva v času Δt, pri populaciji k] = $1 - \lambda_k \Delta t + o(\Delta t)$
  - P[natančno nobene smrti času Δt, pri populaciji k] = $1 - \mu_k \Delta t + o(\Delta t)$

N. Zimic 2-50

Verjetnost stanja (nad.)

- Verjetnost ohranjanja populacije k v času Δt je:

$$p_{k,k} = (1-\lambda_k \Delta t + o(\Delta t))(1-\mu_k \Delta t + o(\Delta t))$$

- Iz česar sledi:

$$\pi_k(t+\Delta t) = \pi_k(t)(1-\lambda_k \Delta t + o(\Delta t))(1-\mu_k \Delta t + o(\Delta t)) +$$
$$\pi_{k-1}(t)(\lambda_{k-1}\Delta t + o(\Delta t)) + \pi_{k+1}(t)(\mu_{k+1}\Delta t + o(\Delta t)) + o(\Delta t)$$

- In za stanje 0:

$$\pi_0(t+\Delta t) = \pi_0(t)(1-\lambda_0 \Delta t + o(\Delta t)) +$$
$$\pi_1(t)(\mu_1 \Delta t + o(\Delta t)) + o(\Delta t)$$

N. Zimic 2-51

Verjetnost stanja (nad.)

- Sprememba verjetnosti po času je:

$$\frac{\pi_k(t+\Delta t)-\pi_k(t)}{\Delta t} = -(\lambda_k + \mu_k)\pi_k(t) + \lambda_{k-1}\pi_{k-1}(t) +$$
$$\mu_{k+1}\pi_{k+1}(t) + o(\Delta t), \quad k \ge 1$$

$$\frac{\pi_0(t+\Delta t)-\pi_0(t)}{\Delta t} = -\lambda_0 \pi_0(t) + \mu_1 \pi_1(t) + o(\Delta t)$$

N. Zimic 2-52

Verjetnost stanja (nad.)

- Sprememba verjetnosti po limitnem procesu $\Delta t \to 0$:

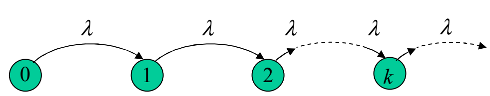
$$\frac{d\pi_k(t)}{dt} = -(\lambda_k + \mu_k)\pi_k(t) + \lambda_{k-1}\pi_{k-1}(t) + \mu_{k+1}\pi_{k+1}(t), \quad k \ge 1$$

$$\frac{d\pi_0(t)}{dt} = -\lambda_0\pi_0(t) + \mu_1\pi_1(t)$$

- Enačbe predstavljajo množico diferencialno diferenčnih enačb za rojstno smrtni sistem, ki opisujejo dinamiko sistema.

Čisti rojstni sistem

- Za čisti rojstni proces so intenzivnosti prehajanja:
  - intenzivnost porojevanja zahtev $\lambda_k = \lambda$
  - intenzivnost umiranja zahtev $\mu_k = 0$



$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Čisti rojstni sistem (nad.)

- Za čisti rojstni sistem velja:

$$\frac{d\pi_k(t)}{dt} = -\lambda\pi_k(t) + \lambda\pi_{k-1}(t), \quad k \geq 1$$

$$\frac{d\pi_0(t)}{dt} = -\lambda\pi_0(t)$$

- Začetno stanje čistega rojstnega sistema:

$$\pi_k(0) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \geq 1 \end{cases}$$

N. Zimic 2-55

Čisti rojstni sistem (nad.)

- Rešitev diferencialnih enačb je:

$$\pi_0(t) = e^{-\lambda t}$$

$$\frac{d\pi_1(t)}{dt} = -\lambda\pi_1(t) + \lambda e^{-\lambda t}$$

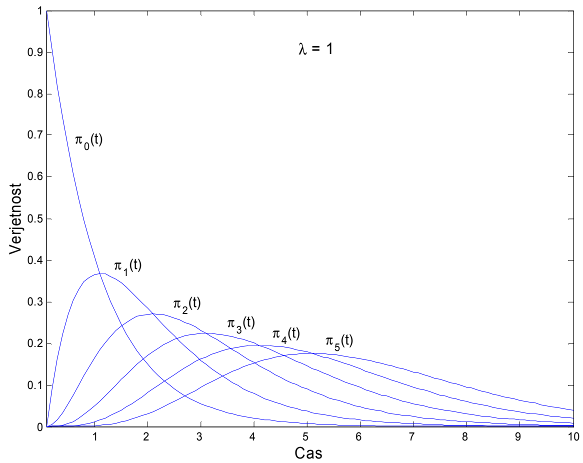
$$\pi_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$$

- Kar daje Poissonovo verjetnostno porazdelitev:

$$\boxed{\pi_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad k \geq 0, t \geq 0}$$

N. Zimic 2-56

Graf verjetnosti čisti rojstnega sistema



N. Zimic 2-57

Lastnosti čistega rojstnega procesa

- Poissonova verjetnostna porazdelitev:

$$P[X(s,s+t)=k]=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}, \quad k\geq 0, s,t\geq 0$$

- Porazdelitvena funkcija:

$$A(t)=1-P[\tilde{t}>t]=1-\pi_0(t)$$

$$A(t)=1-e^{-\lambda t}, \quad t>0$$

- Gostota verjetnosti:

$$a(t)=e^{-\lambda t}, \quad t>0$$

N. Zimic 2-58

Poisnova in eksponentna verjetnostna porazdelitev

- Poissonova verjetnostna porazdelitev

$$P[X(t)=k]=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}, \quad k\geq 0, t\geq 0$$

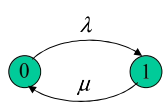
- Eksponentna verjetnostna porazdelitev podaja čas med dogodki Poissonove verjetnostne porazdelitve:

$$P[\tau \leq t]=1-P[\tau > t]=1-P[X(t)=0]$$

$$P[\tau \leq t]=1-e^{-\lambda t}$$

Markovski sistem z dvema stanjema

- Markovski sistem ima dve stanji S={0,1}



- Matrika intenzivnosti prehajanja stanj je:

$$\mathbf{Q}=\begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{bmatrix}$$

Markovski sistem z dvema stanjema (nad.)

- Sistem diferencialnih enačb za podani sistem:

$$\frac{d\pi_0(t)}{dt} = -\mu\pi_0(t) + \lambda\pi_1(t)$$

$$\frac{d\pi_1(t)}{dt} = \mu\pi_0(t) - \lambda\pi_1(t)$$

- Velja tudi:

$$\pi_0(t) = 1 - \pi_1(t)$$

N. Zimic

2-61

Markovski sistem z dvema stanjema (nad.)

- Pri začetnem vektorju $\boldsymbol{\pi}(0) = [0,1]$ je rešitev sistema diferencialnih enačb:

$$\pi_1(t) = \frac{\mu}{\mu+\lambda} + \frac{\lambda}{\mu+\lambda}(e^{-(\mu+\lambda)t})$$

$$\pi_0(t) = 1 - \pi_1(t)$$

$$\pi_0(t) = \frac{\lambda}{\mu+\lambda} - \frac{\lambda}{\mu+\lambda}(e^{-(\mu+\lambda)t})$$

N. Zimic

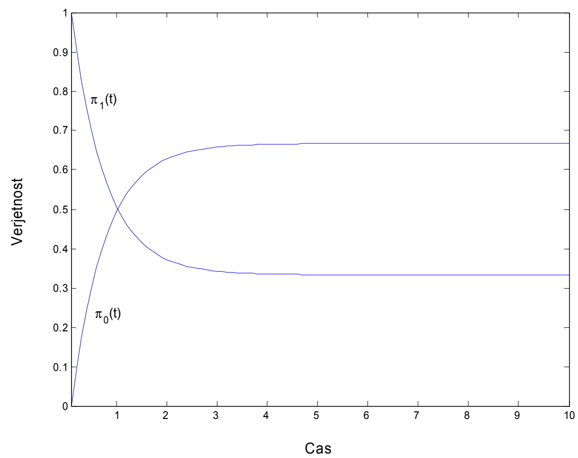
2-62

Graf verjetnosti za sistem z dvema stanjema

$\boldsymbol{\pi}(0) = [0,1]$

$\lambda = 1$

$\mu = 0.5$



Stacionarno stanje

- Stacionarno stanje je:

$$\pi_k = \lim_{t\to\infty} \pi_k(t)$$

- Pri stacionarnih razmerah je $\frac{d\pi_k(t)}{dt} = 0$, zato se sistem diferencialnih enačb za rojstno smrtni sistem spremeni v diferenčne:

$$0 = -(\lambda_k + \mu_k)\pi_k + \lambda_{k-1}\pi_{k-1} + \mu_{k+1}\pi_{k+1}, \quad k \geq 1$$

$$0 = -\lambda_0\pi_0 + \mu_1\pi_1$$

Stacionarno stanje (nad.)

- Rešitev sistema enačb je:

$$\pi_k = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_k} \pi_0 = \pi_0 \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}$$

- Na osnovi enačbe $\sum_{i \in S} \pi_i = 1$ sledi:

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}}$$

Tipi strežnega sistema

- Rojstno smrtni sistem je pri parametrih :

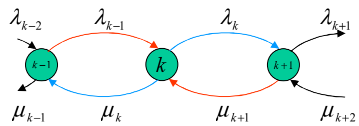
$$S_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} \qquad S_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}}$$

  - Ergodičen strežni sistem pri $S_1 < \infty$ in $S_2 = \infty$
  - Nepovranti strežni sistem pri $S_1 = \infty$ in $S_2 = \infty$
  - Prehodni strežni sistem $S_1 = \infty$ in $S_2 < \infty$
- Poenostavljeni pogoj za ergodičnost je:

$$\frac{\lambda_k}{\mu_{k+1}} < 1, \quad \forall k \geq 0$$

Globalno ravnotežje

- Iz enačbe za globalno ravnotežje splošne Markovske verige sledi enačba za rojstno smrtni sistem:

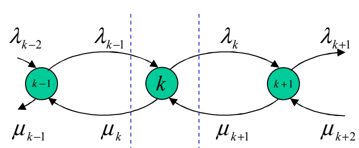


$$(\lambda_k + \mu_k)\pi_k = \lambda_{k-1}\pi_{k-1} + \mu_{k+1}\pi_{k+1}, \quad k > 0$$

$$\lambda_0 \pi_0 = \mu_1 \pi_1$$

Lokalno ravnotežje

- Lokalno ravnotežje podaja relacijo med sosednjima stanjema:



$$\lambda_{k-1}\pi_{k-1} = \mu_k \pi_k \qquad \lambda_k \pi_k = \mu_{k+1}\pi_{k+1}$$

$$\pi_k = \pi_{k-1}\frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k}, \quad k > 0$$

Osnove strežnega procesa

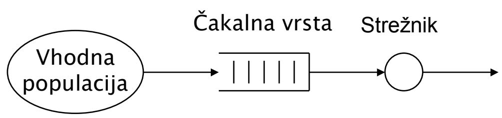
N. Zimic

Osnove strežnega procesa

- V moderni tehnologiji se vedno bolj pogosto uporabljajo porazdeljeni resursi. Med temi resursi se nahajajo čakalne vrste. Posebno pogosta uporaba čakalnih vrst je v:
  - telefonskih telekomunikacijah,
  - računalniških komunikacijah,
  - porazdeljenih računalniških sistemih,
  - več opravilnih operacijskih sistemih,
  - ...
- Namen teorije čakalnih vrst je izboljšanje delovanja sistemov, oziroma boljša izraba resursov.

Strežna enota

- Strežna enota je sestavljena iz čakalne vrste in strežnika:



- Na vhodu strežnika se porajajo zahteve, kar se imenuje tudi vhodni proces.
- Zahteve se porajajo iz vhodne populacije zahtev.
- Zahteve se, če je strežnik zaseden, zadržujejo v čakalni vrsti, kjer čakajo, da se strežnik sprosti.

Strežna enota (nad.)

- Strežna enota lahko vsebuje en ali več strežnikov, ki obdelujejo (strežejo) zahteve.
- Strežba, ki se imenuje tudi umiranje zahtev, je opisana s strežnim procesom.
- Proces v strežni enoti se lahko razdeli na tri osnovne sklope:
  – vhodni proces,
  – strukturo sistema,
  – izhodni (strežni) proces.

Značilnost vhodnega procesa

- Velikost vhodne populacije:
  - če je možno se jemlje velikost populacije neskončno velika, kar poenostavi matematično analizo,
  - če je populacija bistveno večja od velikosti sistema se pri analizi upošteva kot neskončna populacija,
  - pri končni (majhni) populaciji ima strežni proces vpliv na vhodni proces.
- Primeri sistemov z neskončno populacijo: bankomati, telefonske centrale, sistem za rezervacijo letalskih kart,...
- Primer sistemov s končno populacijo: terminalski sistem, mrežni tiskalnik,...

Značilnost vhodnega procesa (nad.)

- Prihajanje zahtev v strežno enoto je lahko v regularnih vzorcih ali pa popolnoma naključno.
- Če je prihajanje zahtev determninistično, za opis procesa zadostuje samo podatek o intenzivnosti prihodov zahtev.
- Ko je vhodna populacija majhna, je vhodni proces odvisen od strežbe.
- Če je prihajanje zahtev naključno, se proces opiše z verjetnostno porazdelitvijo.
- Najbolj pogosto uporabljena verjetnostna porazdelitev je Poisonova porazdelitev.

Značilnost vhodnega procesa (nad.)

- Vhodni procesi so opisani s črkami:
  - M markovski (Poissonov) proces,
  - D deterministični vhodni proces,
  - E Erlangov vhodni proces,
  - G splošen vhodni proces.
- Vhodni proces je izgubni, če se zahteva na vhodu zavrne. Najbolj pogost primer izgubnega sistema je zavrnitev zahteve, ko je čakalna vrsta polna.

Struktura sistema

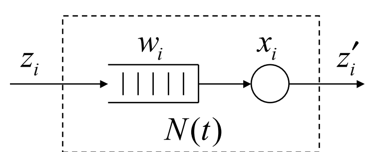
- Strežni sistem je sestavljen iz čakalne vrste in strežnikov.
- Strežni sistem lahko vsebuje en ali več strežnikov, ki so lahko vezani paralelno ali zaporedno.
- Kapaciteta sistema je število zahtev, ki jih strežna enota lahko sprejme. Ko je sistem poln, se prihajajoče zahteve zavrnejo. Kapaciteta sistema je velikost čakalne vrste in število strežnikov.

Izhodni proces

- Izhodni proces je odvisen od značilnosti strežnega procesa in discipline jemanja iz čakalne vrste.
- Strežni proces se lahko opiše z naslednjimi procesi:
  - M markovski strežni proces,
  - D deterministični strežni proces,
  - E Erlangov strežni proces,
  - G splošen strežni proces.
- Najpogostejše discipline jemanja iz čakalne vrste so:
  - FCFS: prvi pride, prvi je postrežen,
  - LCFS: zadnji pride, prvi je postrežen,
  - po prioritetnem sistemu,
  - dodeljevanju časa,
  - naključno.

Osnovne veličine v strežni enoti

- Strežna enota je simbolično predstavljena:



- Zahteva z_i nastopi v strežbo in po določenem času postrežena zahteva z_i' zapusti sistem.
- V času t je v sistemu $N(t)$ zahtev.
- Strežna enota je v pripravljenosti, če je v njej ni zahtev:

  $N(t) = 0$

Osnovne veličine v strežni enoti (nad.)

- Čas vstopa zahteve z_i v sistem je τ_i.
- Čas med prihodi zahtev z_i in z_{i-1} (medprihodni čas) je:

$$t_i = \tau_i - \tau_{i-1}$$

- Prihode zahtev v strežno enoto obravnavamo kot naključni proces. Čas med prihodi t_i pa kot naključno spremenljivko.
- Porazdelitvena funkcija medprihodnega časa je:

$$A_i(t) = P[t_i \leq t]$$

N. Zimic 3-11

Osnovne veličine v strežni enoti (nad.)

- Zahteva z_i potrebuje čas strežbe x_i. Tudi strežbo obravnavamo kot naključni proces in čas strežbe kot naključno spremenljivko. Porazdelitvena funkcija strežbe je:

$$B_i(x) = P[x_i \leq x]$$

- V limitnem procesu, ko gre indeks *i* proti neskončno dobimo porazdelitveni funkciji vhodnega in strežnega procesa:

$$A(t) = P[\tilde{t} \leq t]$$

$$B(x) = P[\tilde{x} \leq x]$$

N. Zimic 3-12

Spremenljivke strežne enote

- V strežni enoti uporabljamo naslednje spremenljivke:
  - $N(t)$ število zahtev v strežni enoti v času t,
  - $N_q(t)$ število zahtev v čakalni vrsti v času t,
  - $N_s(t)$ število zahtev v strežniku v času t,
  - N povprečno število zahtev sistemu (strežni enoti),
  - N_q povprečno število zahtev v čakalni vrsti,
  - N_s povprečno število zahtev v strežniku,
  - T_k čas, ki ga k-ta zahteva prebije v sistemu,
  - W_k čas, ki ga k-ta zahteva prebije v čakalni vrsti,
  - x_k čas, ki ga k-ta zahteva prebije v strežniku,

N. Zimic 3-13

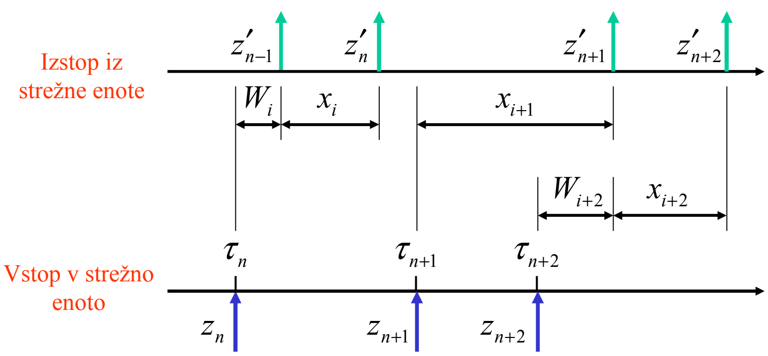
Spremenljivke strežne enote (nad.)

- T povprečen čas, ki ga zahteva prebije v sistemu,
- W povprečen čas, ki ga zahteva prebije v čakalni vrsti,
- $\overline{x}$ povprečen čas, ki ga zahteva prebije v strežbi (povprečen čas strežbe),
- $P_k(t)$ verjetnost, da je v času t v sistemu k zahtev,
- P_k stacionarna verjetnost, da je v sistemu k zahtev,
- λ intenzivnost porajanja zahtev,
- μ intenzivnost strežbe (umiranja zahtev).

N. Zimic 3-14

Primer strežbe

- Časovni potek strežbe:



N. Zimic 3-15

Relacije v strežni enoti

- Število zahtev v strežni enoti je:

$$N(t) = N_q(t) + N_s(t)$$

$$N = N_q + N_s$$

- Čas zadrževanja v strežni enoti je:

$$T_k = W_k + x_k$$

$$T = W + \overline{x}$$

N. Zimic 3-16

Stacionarne vrednosti

- Ergodičen naključni sistem v limitnem procesu doseže stacionarne vrednosti:

$$N = \lim_{t\to\infty} N(t) = \lim_{t\to\infty} E[N(t)]$$
$$N_q = \lim_{t\to\infty} N_q(t) = \lim_{t\to\infty} E[N_q(t)]$$
$$N_s = \lim_{t\to\infty} N_s(t) = \lim_{t\to\infty} E[N_s(t)]$$
$$T = \lim_{k\to\infty} T_k = \lim_{k\to\infty} E[T_k]$$
$$W = \lim_{k\to\infty} W_k = \lim_{k\to\infty} E[W_k]$$
$$\overline{x} = \lim_{k\to\infty} x_k = \lim_{k\to\infty} E[x_k]$$
$$P_k = \lim_{t\to\infty} P_k(t)$$

N. Zimic 3-17

Littlovo pravilo

- Povprečno število zahtev je enako vhodni intenzivnosti krat povprečen čas zadrževanja zahteve v sistemu (Littlovo pravilo):

$$N = \lambda T$$

- Littlovo pravilo velja tudi za čakalno vrsto in strežnik:

$$N_q = \lambda W$$
$$N_s = \lambda \overline{x} = \lambda / \mu = \rho$$

- Faktor uporabnosti ρ strežne enote je med 0 in 1.
- Za m strežnikov je faktor uporabnosti:

$$\rho = \frac{\lambda}{m\mu}$$

N. Zimic 3-18

Notacija strežnih enot

- Strežne enote se najpogosteje opišejo s trojčkom:
  $A/B/m$
- Kjer posamezne črke pomenijo:
  - A verjetnostna porazdelitve prihajanja zahtev v strežno enoto,
  - B verjetnostna porazdelitev strežbe,
  - m število strežnikov v strežni enoti.
- Najbolj pogosto uporabljene verjetnostne porazdelitve so:
  - M eksponentna (Poisonova) porazdelitev,
  - E_r erlangova porazdelitev stopnje r,
  - H_r hipereksponentna porazdelitev stopnje r,
  - G splošna porazdeltivev,
  - D deterministična porazdelitev.

N. Zimic 3-19

Notacija strežnih enot (nad.)

- Primeri notacij:
  - $M/M/1$: Poisonova verjetnostna porazdelitev na vhodu, eksponentna verjetnostna porazdelitev strežbe in en strežnik,
  - $M/D/3$: Poisonova verjetnostna porazdelitev na vhodu, deterministična porazdelitev strežbe in trije strežniki,
  - $G/\ E_r/10$: Splošna verjetnostna porazdelitev na vhodu, erlangova verjetnostna porazdelitev strežbe in deset strežnikov.
- Razširjena notacija:
  $A/B/m/K/M$
  - K kapaciteta sistema (število zahtev, ki jih lahko sistem sprejme),
  - M velikost vhodne populacije.

N. Zimic 3-20

Notacija strežnih enot (nad.)

- Primeri notacij:
  - *D*/*M*/10/40: Deterministična vhodna porazdelitev, eksponentna verjetnostna porazdelitev strežbe, deset strežnikov, velikost sistema je 40 in neskončna vhodna populacija,
  - *M*/*M*/1//20: Poisonova verjetnostan vhodna porazdelitev, eksponentna verjetnostna porazdelitev strežbe, en strežnik, neskončna velikost sistema in velikost vhodne populacije je 20.
- Če število v notaciji ni navedeno se jemlje kot neskončno (neskončna velikost sistema, neskončna velikost populacije).

N. Zimic 3-21

Notacija strežnih enot (nad.)

- Razširjena notacija z strežno disciplino *X*:

  $(A/B/m):(X/K/M)$
- Notacije strežnih disciplin so:
  - *FIFO* (first in first out) prvi pride, prvi je postrežen,
  - *LIFO* (last in first out) zadnji pride, prvi je postrežen,
  - *SIRO* (service in random order) naključna strežba,
  - *NPRE* s prioriteto brez prekinjanja,
  - *PREP* s prioriteto s prekinjanjem.

N. Zimic 3-22

Ergodičnost

- Povprečje je podano kot integral pri dovolj dolgi periodi T:

$$m = \frac{1}{T}\int_0^T X(t)dt$$

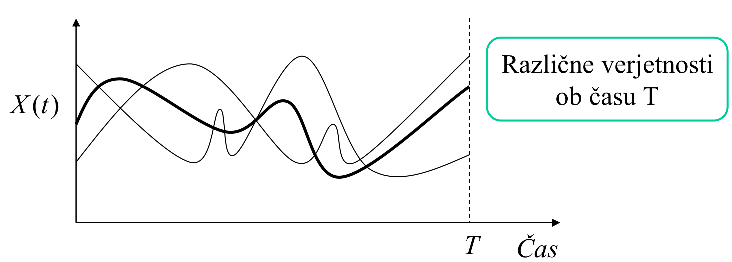
- Zbirno povprečje stohastičnega sistema je:

$$E[X(T)] = \sum_{k=0}^{\infty} kP[X(T) = k]$$

N. Zimic 3-23

Ergodičnost (nad.)

- Stohastični sistem je ergodičen, če je časovno povprečje enako zbirnemu povprečju, če gre čas T proti neskončnosti $T \to \infty$.
- Zbirno povprečje:



N. Zimic 3-24

Poissonov proces

- Poissonov proces je zanimiv zaradi dveh lastnosti: zadovoljivo opisuje večino verjetnostnih porazdelitev v naravi in ima lepe matematične značilnosti.
- Poissonov proces je zvezni proces, ki naključno razporedi k dogodkov v času $(0,t)$.
- Naključna spremenljivka $X(t)$ podaja število dogodkov na intervalu $(0,t)$. Poissonova verjetnostna porazdelitev je podana:

$$P[X(t)=k]=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$$

N. Zimic 3-25

Poissonov proces (nad.)

- Kjer je λ srednja vrednost naključne spremenljivke. Fizikalno λ predstavlja povprečno število dogodkov na intervalu $(0,t)$.
- Poissonov proces izhaja iz binomske porazdelitve. Predpostavimo da časovni interval $(0,t)$ razdelimo na n časovnih rezin. V tem času se mora zgoditi natanko k dogodkov. Iz binomske porazdelitve izhaja:

$$P[k\ \ dogodkov\ v\ n\ časovnih\ rezinah]=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

N. Zimic 3-26

Poissonov proces (nad.)

- S povečevanjem števila časovnih rezin proti neskončnosti postane čas zvezen. S tem se zmanjšuje verjetnost dogodka p tako, da velja:

$$np = \lambda t$$

- Kar vodi do Poissonve verjetnostne porazdelitve:

$$P[k\ prihodov\ v\ intervalu\ (0,t)] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda t}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda t}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{(\lambda t)^k}{k!} \left[\lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{n^k}\right] \left[\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{\lambda t}{n}\right)^n\right] =$$

N. Zimic 3-27

Poissonov proces (nad.)

- Sledi:

$$= \frac{(\lambda t)^k}{k!} \left[\lim_{n\to\infty} \left\{\left(1-\frac{\lambda t}{n}\right)^{n/\lambda t}\right\}^{-\lambda t}\right] =$$

$$= \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

- Pri poenostavitvi je bil uporabljen izraz:

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{\lambda t}{n}\right)^{n/\lambda t}$$

N. Zimic 3-28

Strežni sistemi

N. Zimic

Deterministični strežni sistem D/D/1

- Sistem D/D/1 je sistem, pri katerem se čas med prihodi zahtev in čas strežbe ne spreminja.
  - Čas med prihodi zahtev je:

$$t_i = t_{i+1} = \ldots = t = 1/\lambda$$

  - Čas strežbe je konstanten:

$$x_i = x_{i+1} = \ldots = x = 1/\mu$$

- Če sistem dovolj dolgo opazujemo je v primeru $t > x$ oziroma $\mu > \lambda$ je čakalna vrsta prazna. V sistemu je zahteva lahko le v strežniku.

Deterministični strežni sistem D/D/1 (nad.)

- V primeru, ko je $t = x$ se število zahtev v čakalni vrsti ne spreminja.
- V primeru $t < x$ pa gre število zahtev v čakalni vrsti proti neskončnosti.
- Čas zadrževanja zahteve v sistemu in število zahtev v vrsti in sistemu je:

$$T = W + x = x$$
$$N_q = \lambda W = 0$$
$$N = \lambda T = \lambda x$$

N. Zimic 4-3

Strežni sistem M/M/1

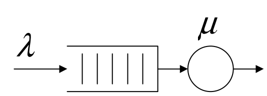
- Strežni sistem M/M/1
  - Prva črka M: Poisosnova verjetnostna porazdelitev porojevanja zahtev

$$\lambda_k = \lambda, \quad k = 0,1,2,\ldots \qquad A(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

  - Druga črka M: eksponentna verjetnostna porazdelitev strežbe

$$\mu_k = \mu, \quad k = 1,2,3,\ldots \qquad B(x) = 1 - e^{-\mu x}$$

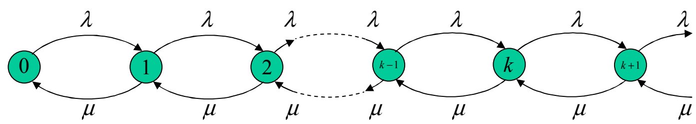
  - Številka 1: en strežnik



N. Zimic 4-4

Strežni sistem M/M/1 (nad.)

- Strežni sistem M/M/1 (rojstno smrtni sistem):



- Iz enačb za splošen rojstno smrtni sistem izhaja:

$$\pi_k = \pi_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k = \pi_0 \rho^k, \quad k \geq 0$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

Strežni sistem M/M/1 (nad.)

- Verjetnost praznega sistema je:

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k} = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} \rho^k} = \frac{1}{(1-\rho)^{-1}} = 1 - \rho$$

$$(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots \qquad |x| < 1$$

- Verjetnost *k*-tega stanja (*k* zahtev v sistemu):

$$\pi_k = (1-\rho)\rho^k$$

Strežni sistem M/M/1 (nad.)

- Pogoj za ergodičnost:

$$S_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k < \infty$$

$$S_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^k = \infty$$

- Zgornja pogoja sta zadovoljena pri:

$$\lambda < \mu$$

Strežni sistem M/M/1 (nad.)

- Povprečno število zahtev v sistemu:

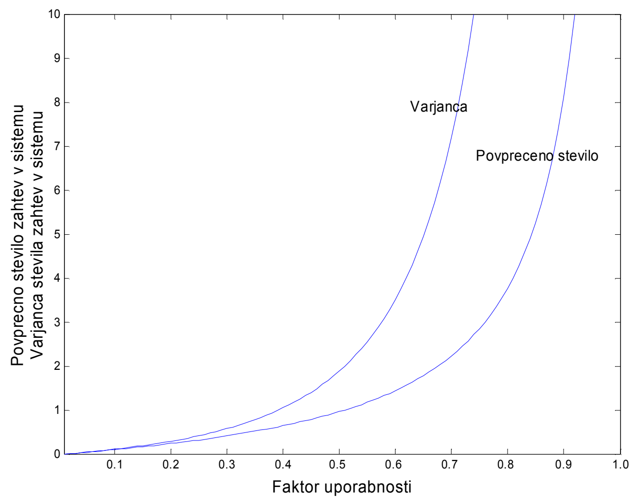
$$\bar{N} = \sum_{k=0}^{\infty} k\pi_k = \sum_{k=0}^{\infty} k(1-\rho)\rho^k$$

$$\bar{N} = (1-\rho)\sum_{k=0}^{\infty} k\rho^k = (1-\rho)\frac{\rho}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho}{(1-\rho)}$$

- Varianca števila zahtev v sistemu:

$$\sigma_N^2 = \sum_{k=0}^{\infty} (k-\bar{N})^2 \pi_k = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$$

Strežni sistem M/M/1 (nad.)



N. Zimic 4-9

Strežni sistem M/M/1 (nad.)

- Povprečno število zahtev v strežniku:

$$\overline{N}_S = \lambda \overline{x} = \frac{\lambda}{\mu} = \rho$$

- Povprečno število zahtev v vrsti:

$$\overline{N}_q = \overline{N} - \overline{N}_S = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

N. Zimic 4-10

Strežni sistem M/M/1 (nad.)

- Povprečen čas zadrževanja v sistemu je:

$$T = \frac{\overline{N}}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\frac{\rho}{1-\rho} = \frac{1}{\mu-\lambda}$$

- Povprečen čas zadrževanja v vrsti:

$$W = \frac{\overline{N}_q}{\lambda} = T - \overline{x} = T - \frac{1}{\mu} = \frac{\rho}{\mu-\lambda}$$

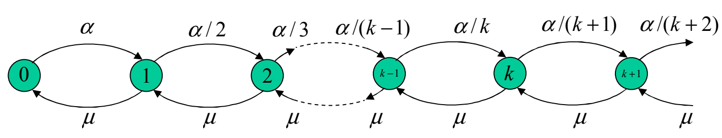
Omahljiv strežni sistem

- Rojstno smrtni sistem z značilnostmi:

$$\lambda_k = \frac{\alpha}{k+1}, \quad k = 0,1,2,\ldots$$

$$\mu_k = \mu, \quad k = 1,2,3,\ldots$$

- Diagram prehajanja stanj za omahljiv strežni sistem:



Omahljiv strežni sistem (nad.)

- Verjetnost k zahtev v sistemu je:

$$\pi_k = \pi_0 \prod_{k=1}^{k-1} \frac{\alpha/(i+1)}{\mu} = \pi_0 \left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^k \frac{1}{k!}$$

- Iz česar sledi verjetnost praznega sistema:

$$\pi_0 = \frac{1}{1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^k \frac{1}{k!}} \qquad \pi_0 = e^{-\frac{\alpha}{\mu}}$$

N. Zimic 4-13

Omahljiv strežni sistem (nad.)

- Verjetnost k zahtev v sistemu je:

$$\pi_k = \frac{(\alpha/\mu)^k}{k!} e^{-\frac{\alpha}{\mu}}$$

- Faktor uporabnosti v omahljivem strežnem sistemu je:

$$\rho = 1 - \pi_0 = 1 - e^{-\frac{\alpha}{\mu}}$$

- Pogoj stabilnosti je dosežen, če:

$$\frac{\alpha}{\mu} < \infty$$

N. Zimic 4-14

Omahljiv strežni sistem (nad.)

- Povprečno število zahtev v sistemu je:

$$\bar{N} = \sum_{k=0}^{\infty} k\,\pi_k = \frac{\alpha}{\mu}$$

- Glede na faktor uporabnosti $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$ sledi:

$$\lambda = \mu\rho = \mu(1 - e^{-\frac{\alpha}{\mu}})$$

- Ter čas zadrževanja v sistemu:

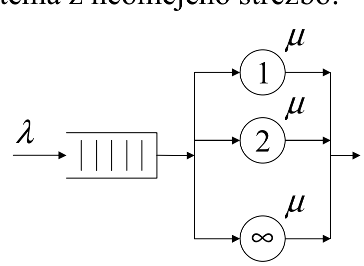
$$T = \frac{\bar{N}}{\lambda} = \frac{\alpha}{\mu^2(1 - e^{-\frac{\alpha}{\mu}})}$$

Strežni sistem z neomejeno strežbo M/M/∞

- Rojstno smrtni sistem z neomejeno strežbo (neskončno strežnikov):

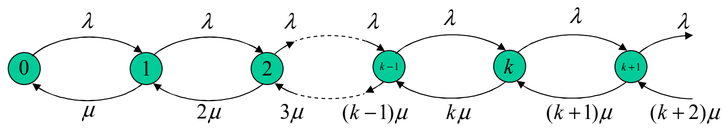
$$\lambda_k = \lambda, \quad k = 0,1,2,\ldots$$
$$\mu_k = k\mu, \quad k = 1,2,3,\ldots$$

- Slika sistema z neomejeno strežbo:



Strežni sistem z neomejeno strežbo M/M/∞ (nad.)

- Diagram prehajanja stanj za sistem z neomejeno strežbo:



- Verjetnost *k* zahtev v sistemu je:

$$\pi_k = \pi_0 \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda}{(i+1)\mu}$$

$$\pi_k = \frac{(\lambda/\mu)^k}{k!} e^{-\frac{\lambda}{\mu}}$$

Podobnost z omahljivim strežnim sistemom (α in λ)!

N. Zimic 4-17

Strežni sistem z neomejeno strežbo M/M/∞ (nad.)

- Iz podobnosti z omahljivim strežnim sistemom sledi:

$$\bar{N} = \frac{\lambda}{\mu}$$

- Povprečen čas zadrževanja v sistemu je:

$$T = \frac{1}{\mu}$$

- Ker je neskončno strežnikov, so zahteve takoj postrežene, kar pomeni da ni zahtev v čakalni vrsti in je čas zadrževanja v vrsti vedno 0.

N. Zimic 4-18

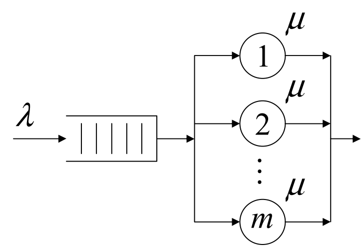
Strežni sistem z *m* strežniki M/M/m

- Rojstno smrtni sistem *m* strežniki

$$\lambda_k = \lambda, \quad k = 0,1,2,\ldots$$

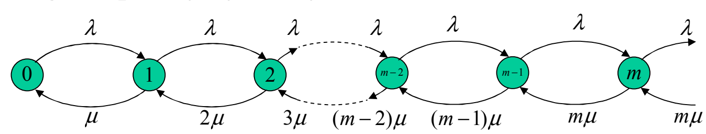
$$\mu_k = \begin{cases} k\mu, & 0 \le k \le m \\ m\mu, & m \le k \end{cases}$$

- Slika sistema z *m* strežniki:



Strežni sistem z *m* strežniki M/M/m (nad.)

- Diagram prehajanja stanj za sistem z *m* strežniki:



- Verjetnost *k* zahtev v sistemu je:

$$\pi_k = \pi_0 \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda}{(i+1)\mu} = \pi_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{1}{k!}, \quad 0 \le k \le m$$

$$\pi_k = \pi_0 \prod_{i=0}^{m-1} \frac{\lambda}{(i+1)\mu} \prod_{i=m}^{k-1} \frac{\lambda}{m\mu}, \qquad k \ge m$$

Strežni sistem z *m* strežniki M/M/m (nad.)

- Faktor uporabnosti posameznega strežnika je:

$$\rho = \frac{\lambda}{m\mu} < 1$$

- Kar poenostavi verjetnost stanja *k*:

$$\pi_k = \pi_0 \frac{(m\rho)^k}{k!}, \quad 0 \le k \le m$$

$$\pi_k = \pi_0 \frac{\rho^k m^m}{m!}, \quad k \ge m$$

N. Zimic 4-21

Strežni sistem z *m* strežniki M/M/m (nad.)

- Iz prejšnjih enačb sledi verjetnost praznega sistema:

$$\pi_0 = \left[\sum_{k=0}^{m-1} \frac{(m\rho)^k}{k!} + \frac{(m\rho)^m}{m!} \frac{1}{1-\rho} \right]^{-1}$$

- Verjetnost, da mora zahteva čakati v vrsti (vsi strežniki so zasedeni):

$$P[K \ge m] = \pi_m = \sum_{k=m}^{\infty} \pi_k = \frac{(m\rho)^m}{m!(1-\rho)} \pi_0$$

N. Zimic 4-22

Strežni sistem z *m* strežniki M/M/m (nad.)

- Povprečno število zahtev v sistemu:

$$\bar{N} = m\rho + \frac{\rho}{1-\rho}\pi_m$$

- Povprečna dolžina čakalne vrste je:

$$\bar{N}_q = \frac{1}{(1-\rho)}\pi_m$$

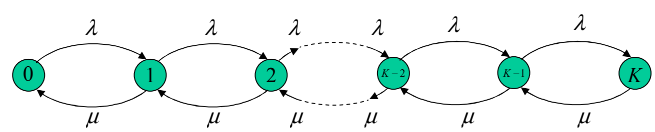
Strežni sistem s končno vrsto M/M/1/K

- Rojstno smrtni sistem s končno vrsto (velikost čakalne vrste + strežnik = velikost sistema = K):

$$\lambda_k = \begin{cases} \lambda, & k = 0,1,2,\ldots \\ 0, & k = K, K+1,\ldots \end{cases}$$

$$\mu_k = \mu, \quad k = 1,2,3,\ldots$$

- Diagram prehajanja stanj za M/M/1/K je:



Strežni sistem s končno vrsto M/M/1/K (nad.)

- Verjetnost k zahtev v sistemu je:

$$\pi_k = \pi_0 \rho^k, \quad k \le K$$

$$\pi_k = 0, \quad k > K$$

- Ker je vsota verjetnosti po vseh stanjih ena sledi:

$$\pi_0 \sum_{k=0}^{K} \rho^k = 1 \qquad \pi_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}$$

$$\pi_k = \frac{(1-\rho)\rho^k}{1-\rho^{K+1}}$$

N. Zimic 4-25

Strežni sistem s končno vrsto M/M/1/K (nad.)

- Sistem je poln, ko je v sistemu K zahtev:

$$\pi_K = \frac{(1-\rho)\rho^K}{1-\rho^{K+1}}$$

- Povprečno število zahtev v sistemu je:

$$\bar{N} = \sum_{k=0}^{K} k\pi_k = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{\rho}{1-\rho}(K+1)\pi_K$$

N. Zimic 4-26

Strežni sistem s končno vrsto M/M/1/K (nad.)

- Intenzivnost prihajanja zahtev v sistem minus intenzivnost zavrnjenih zahtev je:

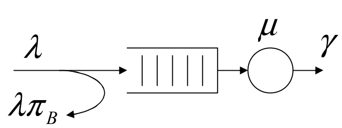
$$\lambda' = \lambda(1-\pi_K)$$

- Povprečen čas prebivanja zahteve v sistemu je:

$$T = \frac{\bar{N}}{\lambda'} = \frac{1}{\mu-\lambda} - \frac{K\rho^{K+1}}{\lambda-\mu\rho^{K+1}}$$

Verjetnost zavrnitve zahtev zaradi polnega sistema

- Število zavrnjenih zahtev je število vseh zahtev, minus število postreženih zahtev:



- Število postreženih zahtev:

$$\gamma = \lambda(1-\pi_B) = \sum_{k=1}^{K} \mu\pi_k = \mu(1-\pi_0)$$

Verjetnost zavrnitve zahtev zaradi polnega sistema (nad.)

- Verjetnost zavrnitve zahteve je:

$$\pi_B = 1 - \frac{\mu}{\lambda}(1 - \pi_0)$$

$$\pi_B = \frac{(1-\rho)\rho^K}{1-\rho^{K+1}}$$

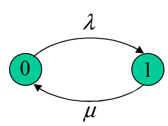
Verjetnost K zahtev v sistemu

- V primeru nasičenja $\rho = 1$ po L'Hospitalovem pravilu sledi:

$$\pi_B = \frac{1}{K+1}$$

Strežni sistem brez vrste M/M/1/1

- Primer sistema brez čakalne vrste (samo strežnik):



- Verjetnosti stanj so:

$$\pi_0 = \frac{1}{1+\rho} \qquad \pi_1 = \frac{\rho}{1+\rho}$$

- Povprečno število zahtev v sistemu je:

$$\bar{N} = \sum_{k=0}^{1} k\pi_k = \frac{\rho}{1+\rho}$$

Strežni sistem brez vrste M/M/1/1 (nad.)

- Verjetnost izgube zahteve zaradi zasedenega sistema, je enaka verjetnosti zadnjega stanja:

$$\pi_B = \frac{(1-\rho)\rho^K}{1-\rho^{K+1}}$$

$$\pi_1 = \frac{\rho}{1+\rho}$$

- Povprečen čas prebivanja zahteve v sistemu je:

$$T = \frac{\overline{N}}{\lambda'} = \frac{\frac{\rho}{1+\rho}}{\lambda(1-\pi_1)} = \frac{1}{\mu} = \overline{x}$$

Izravnani strežni sistem M/M/m/m

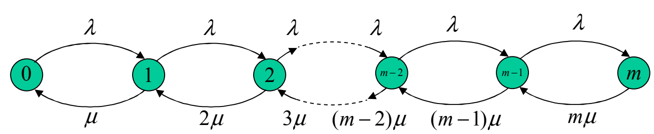
- Število strežnikov je enako velikosti sistema, kar pomeni, da ni čakalne vrste:

$$\lambda_k = \lambda, \quad k < m$$

$$\lambda_k = 0, \quad k \geq m$$

$$\mu_k = k\mu, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

- Diagram prehajanja stanj za izravnani strežni sistem:



Izravnani strežni sistem M/M/m/m (nad.)

- Verjetnost *k*-tega stanja v izravnanem strežnem sistemu:

$$\pi_k = 0, \quad k > m$$

$$\pi_k = \pi_0 \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda}{(i+1)\mu} = \pi_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{1}{k!}, \quad k \le m$$

- Verjetnost praznega sistema:

$$\pi_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{m} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{1}{k!}}$$

N. Zimic 4-33

Izravnani strežni sistem M/M/m/m (nad.)

- Ker ni čakalne vrste, je povprečen čas zadrževanja zahteve v sistemu enak povprečnemu času strežbe:

$$T = \frac{1}{\mu}$$

- Povprečno število zahtev v sistemu je enako povprečnemu številu zahtev v strežnikih:

$$\bar{N} = \frac{\lambda}{\mu}$$

N. Zimic 4-34

Strežni sistem s končno populacijo zahtev

- Populacija zahtev je končna, zato se intenzivnost s številom zahtev v sistemu manjša (sistem M/M/1//M):

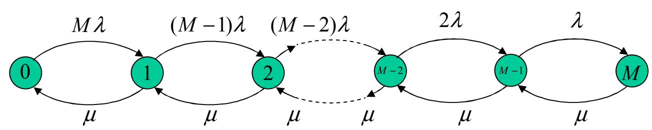
$$\lambda_k = \lambda(M-k), \quad 0 \le k \le M$$

M je velikost populacije

$$\lambda_k = 0, \quad k > M$$

$$\mu_k = \mu, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

- Diagram prehajanja stanj za izravnani strežni sistem:



Strežni sistem s končno populacijo zahtev (nad.)

- Verjetnost *k*-tega stanja v izravnanem strežnem sistemu:

$$\pi_k = 0, \quad k > m$$

$$\pi_k = \pi_0 \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda(M-1)}{\mu} = \pi_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{M!}{(M-k)!}, \quad 0 \le k \le M$$

- Verjetnost praznega sistema:

$$\pi_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{M} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{M!}{(M-k)!}}$$

Strežni sistem M/M/∞//M

- Sistem s končno populacijo zahtev in neskončno strežniki (sistem M/M/∞//M):

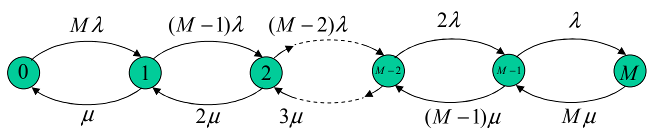
$$\lambda_k = \lambda(M-k), \quad 0 \le k \le M$$

M je velikost populacije

$$\lambda_k = 0, \quad k > M$$

$$\mu_k = k\mu, \quad k = 1,2,3,\ldots$$

- Diagram prehajanja stanj za izravnani strežni sistem:



Strežni sistem s končno populacijo zahtev (nad.)

- Verjetnost k-tega stanja v izravnanem strežnem sistemu:

$$\pi_k = \pi_0 \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda(M-i)}{(i+1)\mu} = \pi_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{M!}{k!(M-k)!}, \quad 0 \le k \le M$$

$$\binom{M}{k} = \frac{M!}{k!(M-k)!}$$

$$\pi_k = \pi_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \binom{M}{k}$$

Strežni sistem s končno populacijo zahtev (nad.)

- Verjetnost praznega sistema:

$$\pi_0 = \left[\sum_{k=0}^{M} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k \binom{M}{k} \right]^{-1}$$

$$\pi_0 = \frac{1}{\left(1 + \frac{\lambda}{\mu}\right)^M} = \left(1 + \frac{\lambda}{\mu}\right)^{-M}$$

Strežni sistem s končno populacijo zahtev (nad.)

- Verjetnost k zahtev v sistemu je:

$$\pi_k = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k \binom{M}{k}}{\left(1 + \frac{\lambda}{\mu}\right)^M}, \quad 0 \le k \le M$$

- Iz splošne enačbe za število zahtev v sistemu sledi:

$$\overline{N} = \sum_{k=0}^{M} k\pi_k = \frac{M\lambda/\mu}{(1 + \lambda/\mu)}$$

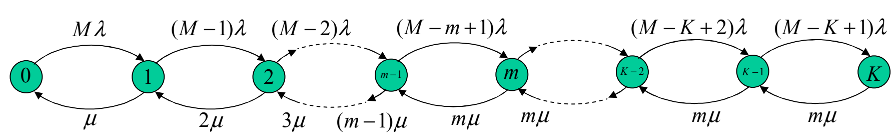
Strežni sistem M/M/m/K/M

- Sistem s končno populacijo zahtev *M* in *m* strežniki in velikostjo sistema *K* (sistem M/M/m/K/M) pri pogoju K<M. Sistem obsega vse značilnosti prej opisanih sistemov:

$$\lambda_k = \lambda(M-k), \quad 0 \le k \le K-1$$
$$\lambda_k = 0, \quad k \ge K$$
$$\mu_k = k\mu, \quad 0 \le k \le m$$
$$\mu_k = m\mu, \quad k > m$$

Strežni sistem M/M/m/K/M (nad.)

- Diagram prehajanja stanj za sistem M/M/m/K/M:



- Verjetnost stanja k pri $0 \le k \le m-1$ je:

$$\pi_k = \pi_0 \prod_{i=0}^{k-1} \frac{(M-i)\lambda}{(i+1)\mu} = \pi_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \binom{M}{K}$$

Strežni sistem M/M/m/K/M (nad.)

- Verjetnost stanja k pri $m \le k \le K$ je:

$$\pi_k = \pi_0 \prod_{i=0}^{m-1} \frac{(M-i)\lambda}{(i+1)\mu} \prod_{i=m}^{k-1} \frac{(M-i)\lambda}{m\mu}$$

$$\pi_k = \pi_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \binom{M}{k} \frac{k!}{m!} m^{m-k}$$

N. Zimic 4-43

Strežni sistem M/M/m/K/M (nad.)

- Zanimiv je primer, ko je velikost čakalne vrste enaka 0 in je velikost populacije večja od števila strežnikov:

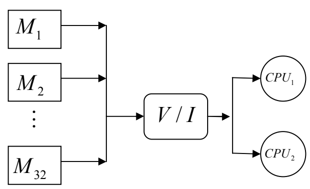
$$M \ge K = m$$

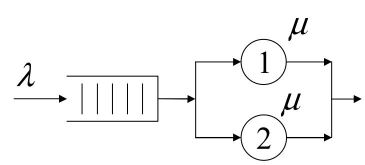
$$\pi_k = \frac{\binom{M}{K}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{\sum_{i=0}^{m} \binom{M}{i}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i}, \quad 0 \le k \le m$$

N. Zimic 4-44

Primer strežnega sistema

- Imamo računalniški sistem z dvema procesorjema, ki imata intenzivnost strežbe μ=6 zahtev/sek. Zahteve prihajajo iz 32 vhodnih modulov z intenzivnostjo 0.6 zahteve/sek. na modul. Velikost čakalne vrste je 30. Ali je sistem uporaben in kakšen je povprečen čas zadrževanja zahteve v sistemu?



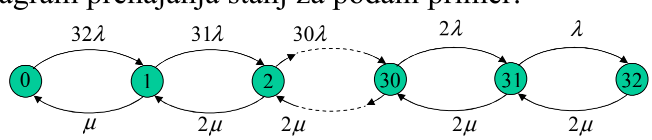


Primer strežnega sistema (nad.)

- Za opisani primer velja:

$$\lambda_k = \lambda(32-k), \quad 0 \le k \le 32$$
$$\lambda_k = 0, \quad k > 32$$
$$\mu_1 = \mu$$
$$\mu_k = 2\mu, \quad 2 \le k \le 32$$

- Diagram prehajanja stanj za podani primer:



Primer strežnega sistema (nad.)

- Iz splošnega sistema izhaja:

$$\pi_k = \pi_0 \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}$$

$$\pi_0 = \frac{1}{1+\sum_{k=1}^{\infty}\prod_{i=0}^{k-1}\frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}} = \frac{1}{1+\sum_{k=1}^{32}\prod_{i=0}^{k-1}\frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}} = 0.001693$$

- Posamezne verjetnosti stanj so:

$$\pi_1 = 0.005418 \quad \pi_3 = 0.012596 \quad \pi_5 = 0.025570$$

$$\pi_2 = 0.008397 \quad \pi_4 = 0.018264 \quad \cdots$$

Primer strežnega sistema (nad.)

- Povprečno število zahtev v sistemu:

$$\bar{N} = \sum_{k=0}^{32} k\pi_k = 12.08804 \approx 12$$

- Povprečna intenzivnost porojevanja zahtev je:

$$\lambda = \sum_{i=0}^{31} \pi_i \lambda_i = 11.94718$$

- Povprečen čas zadrževanja zahtev v sistemu je:

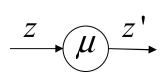
$$T = \frac{\bar{N}}{\lambda} = 1.01179 \text{ sek}$$

Erlangovi in drugi strežniki

N. Zimic

Strežnik z eksponentno verjetnostno porazdelitvijo

- Strežnik z eksponentno verjetnostno porazdelitvijo:



$B(x), b(x), B(s)$

$B(x)$ – porazdelitvena funkcija
$b(x)$ – gostota verjetnosti
$B(s)$ – Laplaceova transformacija gostote verjetnosti

$$\overline{x} = \frac{1}{\mu}, \quad \sigma_x^2 = \frac{1}{\mu^2}, \quad \sigma_x = \frac{1}{\mu}, \quad \overline{x^2} = \frac{2}{\mu^2}$$

Strežnik z eksponentno ver. porazdelitvijo (nad.)

- Porazdelitvena funkcija in gostota verjetnosti:

$$B(x) = 1 - e^{-\mu x}, \quad x \geq 0$$

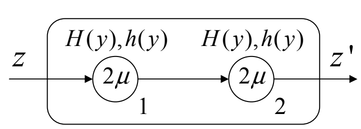
$$b(x) = \frac{dB(x)}{dx} = \mu e^{-\mu x}, \quad x \geq 0$$

- Laplaceova transformacija gostote verjetnosti:

$$B(s) = \int_0^\infty b(x) e^{-sx} dx = \int_0^\infty \mu e^{-\mu x} e^{-sx} dx = \frac{\mu}{s + \mu}$$

Zaporedna vezava dveh strežnikov

- Zaporedna vezava dveh strežnikov z intenzivnostjo strežbe 2μ:



$B(x), b(x)$

- Gostota verjetnosti za notranja strežnika je:

$$h(y) = 2\mu e^{-2\mu y}, \quad y \geq 0$$

Zaporedna vezava dveh strežnikov (nad.)

- Strežni čas nadomestnega strežnika je vsota časov notranjih strežnikov:

  $x = y_1 + y_2$
- Poiskati je potrebno verjetnost strežnega časa *x*, ki je sestavljen iz parov strežnih časov notranjih strežnikov, katerih vsota je čas *x*:

$$b(x) = \int_o^x h(y)\, h(x-y)\, dy = \int_o^x 2\mu e^{-2\mu y}\ 2\mu e^{-2\mu(x-y)} dy$$

$$b(x) = 4\mu^2 \int_o^x e^{-2\mu y - 2\mu x + 2\mu y}\ dy = 4\mu^2 \int_o^x e^{-2\mu x}\ dy$$

Zaporedna vezava dveh strežnikov (nad.)

- Nadaljevanje izračuna iz prejšnje prosojnice:

$$b(x) = 4\mu^2 e^{-2\mu x}\ y\Big|_0^x = 4\mu^2 x\, e^{-2\mu x}, \quad x \geq 0$$

- Laplaceova transformacija gostote verjetnosti:

$$H(s) = \int_0^\infty h(y)\, e^{-sy} dy = \int_0^\infty 2\mu\, e^{-2\mu y}\ e^{-sy} dy = \frac{2\mu}{s + 2\mu}$$

Zaporedna vezava dveh strežnikov (nad.)

- Laplaceova transformacija gostote verjetnosti nadomestnega strežnika:

$$B(s) = H(s)\,H(s) = \left(H(s)\right)^2 = \left(\frac{2\mu}{s+2\mu}\right)^2$$

- Rezultat inverzne Laplaceove transformacije je gostota verjetnosti nadomestnega strežnika:

$$b(x) = 2\mu\,(2\mu x)\,e^{-2\mu x} = 4\mu^2 x\,e^{-2\mu x}, \quad x \geq 0$$

Inverzna Laplaceova transformacija se izračuna s pomočjo tabel (matematičnega priročnika)

Zaporedna vezava dveh strežnikov (nad.)

- Povprečna vrednost strežnega časa dveh zaporedno vezanih strežnikov z eksponentno verjetnostno porazdelitvijo je:

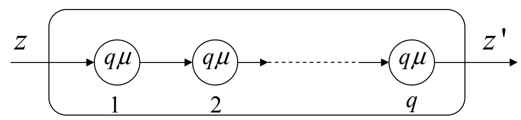
$$\overline{x} = 2\overline{y} = 2\frac{1}{2\mu} = \frac{1}{\mu}$$

- Varianca strežnega časa je:

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 + \sigma_y^2 = 2\sigma_y^2 = \frac{2}{(2\mu)^2} = \frac{1}{2\mu^2}$$

Strežni sistem z Erlangovo strežbo

- Zaporedna vezava q strežnikov z intenzivnostjo strežbe $q\mu$:



- Laplaceova transformacija gostote verjetnosti enega strežnika:

$$H(s)=\int_0^\infty h(y)\,e^{-sy}dy=\int_0^\infty q\mu\,e^{-q\mu y}\;e^{-sy}dy=\frac{q\mu}{s+q\mu}$$

Strežni sistem z Erlangovo strežbo (nad.)

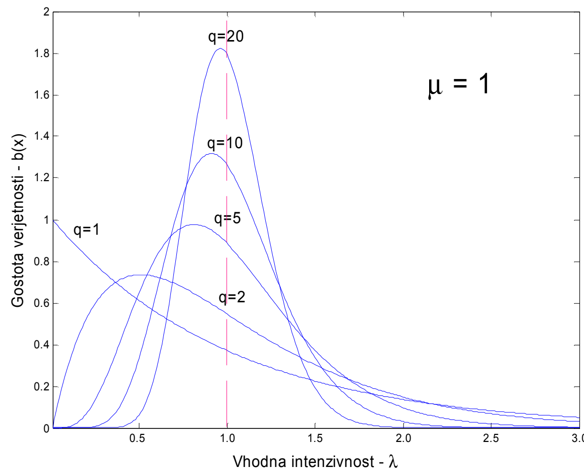
- Laplaceova transformacija gostote verjetnosti nadomestnega strežnika:

$$B(s)=\left(H(s)\right)^q=\left(\frac{q\mu}{s+q\mu}\right)^q$$

- S pomočjo inverzne Laplaceove transformacije dobimo gostoto verjetnosti nadomestnega strežnika:

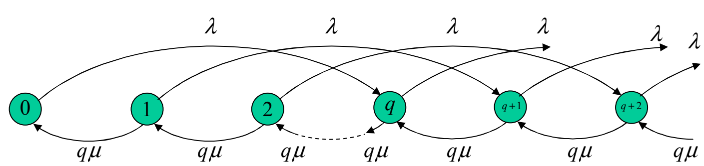
$$b(x)=\frac{q\mu\,(q\mu x)^{q-1}}{(q-1)!}e^{-q\mu x},\quad x\geq 0$$

Strežni sistem z Erlangovo strežbo (nad.)



Strežni sistem M/E$_q$/1

- Strežni sistem M/E$_q$/1:



- Vhodna verjetnostna porazdelitev je Possionova z gostoto verjetnosti:

$$a(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0$$

- Verjetnostna porazdelitev strežbe je Erlangova stopnje q.

Strežni sistem M/E$_q$/1 (nad.)

- Strežni sistem M/E$_q$/1 je prazen, če je v stanju 0.
- V strežnem sistemu je ena zahteva, če se sistem nahaja v enem izmed stanj *j*:

$$1 \le j \le q$$

- V strežnem sistemu je *k* zahtev, če se sistem nahaja v enem izmed stanj *j*:

$$j = (k-1)q + (q-i+1) = kq - i + 1, \quad 1 \le i \le q$$

N. Zimic 5-13

Strežni sistem M/E$_q$/1 (nad.)

- Verjetnost praznega sistema je enaka stacionarni verjetnosti stanja 0:

$$p_0 = \pi_0$$

- Verjetnost *k* zahtev v sistemu je vsota verjetnosti vseh stanj, ki jih zahteve obsegajo:

$$p_k = \sum_{j=(k-1)q+1}^{kq} \pi_j, \quad k \ge 1$$

- V primeru $q = 1$, je to sistem M/M/1, kjer velja:

$$p_k = \pi_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

N. Zimic 5-14

Strežni sistem M/E$_q$/1 (nad.)

- Za strežni sistem M/E$_q$/1 veljajo ravnotežne enačbe:

$$\pi_j = 0, \quad j < 0$$

$$(\lambda + q\mu)\pi_j = \lambda\pi_{j-q} + q\mu\pi_{j+1}, \quad j \ge q$$

$$\lambda\pi_0 = q\mu\pi_1$$

- Zaradi velike razlike v indeksih, se sistem rešuje s pomočjo z-transformacije:

$$P(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j z^{-j}$$

N. Zimic 5-15

Strežni sistem M/E$_q$/1 (nad.)

- Seštejemo vsa stanja od 1 do ∞ in jih pomnožimo z z^j:

$$\sum_{j=1}^{\infty} (\lambda + q\mu)\pi_j z^j = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda\pi_{j-q} z^j + \sum_{j=1}^{\infty} q\mu\pi_{j+1} z^j$$

- Iz česar sledi:

$$(\lambda + q\mu)\left(\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j z^j - \pi_0\right) = \lambda z^q \underbrace{\sum_{j=1}^{\infty} \pi_{j-q} z^{j-q}}_{\pi_j = 0, \quad j < 0} + \frac{q\mu}{z} \sum_{j=1}^{\infty} \pi_{j+1} z^{j+1}$$

Vsota od nič naprej

N. Zimic 5-16

Strežni sistem M/E$_q$/1 (nad.)

- Iz prejšnje enačbe sledi:

$$(\lambda+q\mu)\left(P(z)-\pi_0\right)=\lambda z^q P(z)+\frac{q\mu}{z}\left(P(z)\underbrace{-\pi_0-\pi_1 z}_{\text{Ker indeks vsote teče od 1 naprej}}\right)$$

- Z-transformacija je:

$$P(z)=\frac{\pi_0\left(\lambda+q\mu-\frac{q\mu}{z}\right)-q\mu\pi_1}{\lambda+q\mu-\lambda z^q-\frac{q\mu}{z}}=\frac{q\mu\pi_0(1-z)}{q\mu++\lambda z^{q+1}-(\lambda+q\mu)z}$$

Glej relacijo med verjetnostjo stanja 0 in 1

N. Zimic 5-17

Strežni sistem M/E$_q$/1 (nad.)

- Vsota po vseh stanjih je 1 ter $P(1) = 1$:

$$\sum_{j=0}^{\infty}\pi_j=1$$

$$P(1)=\sum_{j=0}^{\infty}\pi_j 1^j=1$$

- Na osnovi L'Hospitalovega pravila sledi:

$$P(1)=1=\frac{q\mu\pi_0}{q\mu-q\lambda}$$

$$\pi_0=1-\frac{\mu}{\lambda}=1-\rho$$

N. Zimic 5-18

Strežni sistem M/E_q/1 (nad.)

- Z-transformacija verjetnosti:

$$P(z) = \frac{q\mu(1-\rho)(1-z)}{q\mu + \lambda z^{q+1} - (\lambda + q\mu)z}$$

- Inverzna z-transformacija vodi do stacionarnih verjetnosti posameznih stanj.

N. Zimic 5-19

Strežni sistem M/E_q/1 (nad.)

- V primeru, ko je stopnja strežnika q=1, je z-transformacija:

$$P(z) = \frac{\mu(1-\rho)(1-z)}{\mu + \lambda z^2 - (\lambda + \mu)z} = \frac{(1-\rho)(1-z)}{1 + \rho z^2 - (1+\rho)z}$$

- Po poenostavitvi sledi:

$$P(z) = \frac{1-\rho}{1-\rho z}$$

- Rezultat obratne z-transformacije je stacionarna verjetnost stanj za model M/M/1:

$$\pi_k = (1-\rho)\rho^k, \quad k = 0,1,2,\ldots$$

N. Zimic 5-20

Strežni sistem E_q/M/1

- Gostota verjetnosti vhodnega procesa (Erlangovega procesa stopnje q - E_q) je:

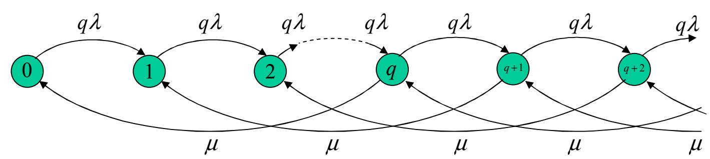
$$a(t) = \frac{q\lambda(q\lambda t)^{q-1} e^{-q\lambda t}}{(q-1)!}, \quad t \geq 0$$

- Gostota verjetnosti strežnega procesa (Markovskega procesa - M) je:

$$b(x) = \mu e^{-\mu x}, \quad x \geq 0$$

Strežni sistem E_q/M/1 (nad.)

- Diagram prehajanja stanj za sistem E_q/M/1:



- Strežni sistem je prazen, če se nahaja v stanjih od 0 do q-1.
- V sistemu je k zahtev, če se sistem nahaja v enem izmed stanj j:

$$j = qk + i - 1, \quad 1 \leq i \leq q$$

Strežni sistem E_q/M/1 (nad.)

- Verjetnost *k* zahtev v sistemu je:

$$p_k = \sum_{j=qk}^{q(k+1)-1} \pi_j$$

- Sistem ravnotežnih enačb za podan sistem je:

$$q\lambda\pi_0 = \mu\pi_q$$

$$q\lambda\pi_j = q\lambda\pi_{j-1} + \mu\pi_{j+q}, \quad 1 \le j \le q-1$$

$$(q\lambda + \mu)\pi_j = q\lambda\pi_{j-1} + \mu\pi_{j+q}, \quad q \le j$$

Strežni sistem E_q/M/1 (nad.)

- Z-transformacija verjetnosti je:

$$P(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j z^j$$

- Z-transformacija ravnotežnih enačb je:

$$\sum_{j=1}^{\infty} (\mu + q\lambda)\pi_j z^j - \sum_{j=1}^{q-1} \mu\pi_j z^j = \sum_{j=1}^{\infty} q\lambda\pi_{j-1} z^j + \sum_{j=1}^{\infty} \mu\pi_{j+q} z^j$$

- Rezultat transformacije je

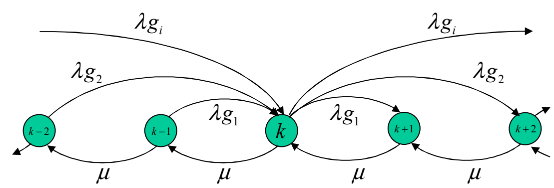
$$P(z) = \frac{(1-z^q)\sum_{j=0}^{q-1} \pi_j z^j}{q\rho z^{q+1} - (1+q\rho)z^q + 1}$$

Strežni sistem z nakopičenim prihodom zahtev

- Zahteve prihajajo v skupinah. Verjetnost prihoda skupine velikosti i je:

$$g_i = P[\text{grupa velikosti } i]$$

- Diagram prehajanja stanj:



Strežni sistem z nakopičenim prihodom zahtev (nad.)

- Intenzivnost prihajanja zahtev v stanje je:

$$\lambda = \lambda g_1 + \lambda g_2 + \ldots = \lambda \sum_{i=1}^{\infty} g_i \qquad \sum_{i=1}^{\infty} g_i = 1$$

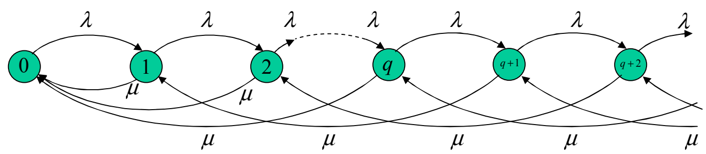
- Sistem ravnotežnih enačb je:

$$(\lambda + \mu)\pi_k = \mu \pi_{k+1} + \sum_{i=0}^{k-1} \pi_i \lambda g_{k-i}, \quad k \geq 0$$

$$\lambda \pi_0 = \mu \pi_1$$

Strežni sistem z nakopičeno strežbo

- Strežni sistem z nakopičeno strežbo streže:
  - q zahtev z intenzivnostjo μ , če je v sistemu q ali več zahtev,
  - z intenzivnostjo μ preostanek zahtev, če je le teh q ali manj.
- Diagram prehajanja stanj:



Strežni sistem z nakopičeno strežbo (nad.)

- Sistem ravnotežnih enačb je:

$$(\lambda+\mu)\pi_k = \mu\pi_{k+q} + \lambda\pi_{k-1}, \quad k \geq 1$$

$$\lambda\pi_0 = \mu(\pi_1 + \pi_2 + \ldots + \pi_q)$$

- Tudi omenjeni sistem ravnotežnih enačb se rešuje s pomočjo z-transformacije.

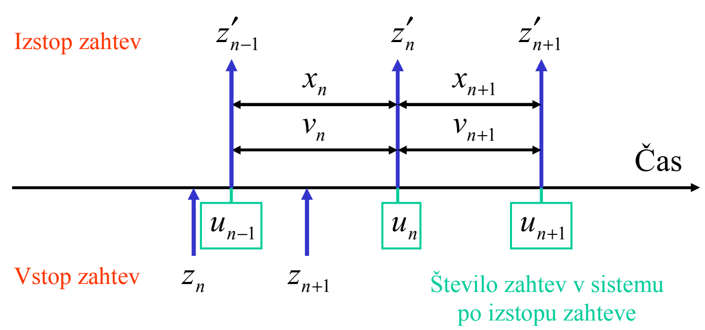
Strežne enote M/G/1

- Model strežnega sistema s Poissonovo verjetnostno porazdelitvijo na vhodu in splošno strežbo M/G/1, vsebuje tudi strežne sisteme: M/D/1, M/E_q/1, M/H_q/1, M/M/1.

- Pri analizi modela M/G/1 uvedemo še dve novi spremenljivki:
  - u_n: število zahtev, ki ostanejo v sistemu po izstopu (strežbi) zahteve z_n
  - v_n: število zahtev, ki vstopijo v sistem v času strežbe zahteve z_n

Strežne enote M/G/1 (nad.)

- Časovni potek strežbe zahteve z_n:



Strežne enote M/G/1 (nad.)

- Verjetnost, da je po izstopu (strežbi) zahteve n v sistemu k zahtev:

$$P[u_n = k]$$

- V primeru ergodičnosti velja:

$$U = \lim_{n\to\infty} u_n$$

$$V = \lim_{n\to\infty} v_n$$

- Iz česar sledi stacionarna verjetnost k zahtev v sistemu:

$$p_k = P[U = k]$$

N. Zimic 5-31

Strežne enote M/G/1 (nad.)

- Verjetnost prehoda med dvema stanjema je:

$$p_{ij} = P[u_{n+1} = j \mid u_n = i]$$

- Verjetnost p_{ij} je verjetnost prehoda, ko zahteva zapusti sistem. Ker v tem času natanko ena zahteva zapusti sistem in se lahko v_{n} = 0,1,2,... zahtev porodi, velja:

$$u_{n+1} \geq u_n - 1$$

N. Zimic 5-32

Strežne enote M/G/1 (nad.)

- Verjetnost prehajanj p_{ij} lahko opišemo z matriko:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} e_0 & e_1 & e_2 & e_3 & \vdots \\ e_0 & e_1 & e_2 & e_3 & \vdots \\ 0 & e_0 & e_1 & e_2 & \vdots \\ 0 & 0 & e_0 & e_1 & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots \end{bmatrix}$$

- Kjer je:

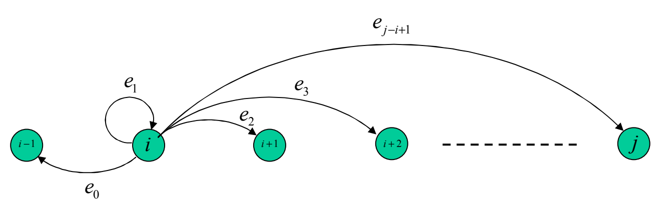
$$e_k = P[v_{n+1} = k]$$

N. Zimic

5-33

Strežne enote M/G/1 (nad.)

- Diagram prehajanja stanj, ki temelji na matriki **P**:



- Ker je vhodni proces neodvisen, je število zahtev v_n, ki vstopijo v sistem med strežbo zahteve n, odvisno samo od intenzivnosti prihoda zahtev λ in od časa strežbe zahteve x_n.

N. Zimic

5-34

Strežne enote M/G/1 (nad.)

- Na osnovi zakona o polni verjetnosti sledi:

$$e_k = P[V=k] = \int_0^\infty P[V=k, x \le X \le x+dx]\, dx$$

- Pogojno verjetnost lahko zapišemo:

$$e_k = \int_0^\infty P[V=k, X=x] b(x) dx$$

$$e_k = \int_0^\infty \frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x} b(x) dx$$

N. Zimic 5-35

Strežne enote M/G/1 (nad.)

- Število zahtev v sistemu po strežbi zahteve n+1 je:

$$u_{n+1} = u_n - 1 + v_{n+1}, \quad u_n > 0$$

$$u_{n+1} = v_{n+1}, \quad u_n = 0$$

- Z uvedbo funkcije Δ_k sledi:

$$\Delta_k = \delta_{k-1} = \begin{cases} 1 & k = 1,2,3,\ldots \\ 0 & k \le 0 \end{cases}$$

$$u_{n+1} = u_n - \Delta_{u_n} + v_{n+1}$$

N. Zimic 5-36

Strežne enote M/G/1 (nad.)

- Povprečne vrednosti zadnje enačbe so:

$$\mathrm{E}[U] = \mathrm{E}[U] - \mathrm{E}[\Delta_U] + \mathrm{E}[\mathrm{V}]$$

- Iz česar sledi povprečje prispelih zahtev v času strežbe:

$$\mathrm{E}[\mathrm{V}] = \mathrm{E}[\Delta_U]$$

- Po definiciji lahko zapišemo:

$$\mathrm{E}[\Delta_U] = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_k P[U = k] = \Delta_0 P[U = 0] + \Delta_1 P[U = 1] + \ldots$$
$$= 0P[U = 0] + 1P[U > 1] = \rho$$

N. Zimic 5-37

Strežne enote M/G/1 (nad.)

- Ker iz prejšnje enačbe ne moremo izračunati E[U], ravnotežno enačbo kvadriramo:

$$u_{n+1}^2 = u_n^2 + \Delta_{u_n}^2 + v_{n+1}^2 - 2u_n\Delta_{u_n} - 2\Delta_{u_n} v_{n+1} + 2u_n v_{n+1}$$

- Povprečje prejšnje enačbe je:

$$0 = \mathrm{E}[\Delta_U] + \mathrm{E}[V^2] - 2\mathrm{E}[U] - 2\mathrm{E}[\Delta_U]\mathrm{E}[V] + 2\mathrm{E}[U]\mathrm{E}[V]$$

- Uporabljena pravila:

$$\Delta_{u_n}^2 = \Delta_{u_n}, \quad u_n\Delta_{u_n} = u_n$$

N. Zimic 5-38

Strežne enote M/G/1 (nad.)

- Iz prejšnje enačbe sledi:

$$\mathrm{E}[U] = \rho + \frac{\mathrm{E}[V^2] - \mathrm{E}[V]}{2(1-\rho)}$$

- Povprečno število zahtev v sistemu je:

$$\bar{U} = \rho + \frac{\overline{V^2} - \bar{V}}{2(1-\rho)}$$

N. Zimic 5-39

Strežne enote M/G/1 (nad.)

- Razliko $\overline{V^2} - \bar{V}$ lahko izrazimo z z-transformacijo:

$$V(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P[V = k] z^k$$

$$V(z) = \int_0^{\infty} e^{-(\lambda - \lambda z)}\, b(x)\, dx$$

- Zadnji izraz je Laplaceova transformacija pri $s = (\lambda - \lambda z)$:

$$V(z) = B(\lambda - \lambda z)$$

N. Zimic 5-40

Strežne enote M/G/1 (nad.)

- Z uporabo Laplaceove transformacije in odvodi z-transformacije sledi:

$$\left(\frac{dV(z)}{dz}\right)_{z=1} = \overline{V} = \lambda\overline{x}$$

$$\left(\frac{d^2V(z)}{dz^2}\right)_{z=1} = \overline{V^2} - \overline{V} = \lambda^2\overline{x^2}$$

- Iz česar sledi:

$$\overline{U} = \rho + \frac{\lambda^2\overline{x^2}}{2(1-\rho)} = \rho + \frac{\lambda w_0}{2(1-\rho)}, \quad w_0 = \lambda\overline{x^2}$$

N. Zimic 5-41

Strežne enote M/G/1 (nad.)

- Koeficient variacij za strežni proces je:

$$C_x^2 = \frac{\sigma_x^2}{\overline{x}^2}$$

- Enačba za varianco strežnega procesa:

$$\sigma_x^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2$$

- $\overline{U}$ je povprečno število zahtev ob izstopu zahteve, kar je enako povprečnemu številu zahtev v sistemu:

$$\overline{U} = \rho + \rho^2\frac{1+C_x^2}{2(1-\rho)} = \overline{N}$$

N. Zimic 5-42

Strežne enote M/G/1 (nad.)

- Na osnovi Littlovega pravila, je čas zadrževanja zahteve v sistemu:

$$T = \frac{\overline{N}}{\lambda} = \overline{x} + \rho\overline{x}\frac{1+C_x^2}{2(1-\rho)}$$

- Čas zadrževanja v čakalni vrsti je čas zadrževanja zahteve v sistemu, minus čas strežbe:

$$W = T - \overline{x} = \rho\overline{x}\frac{1+C_x^2}{2(1-\rho)}$$

Pollaczek-Khinchinova enačba

Strežne enote M/G/1 (nad.)

- Z-transformacija verjetnosti *k* zahtev v sistemu je:

$$U_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P[U_n = k]\, z^k$$

$$U(z) = \lim_{n\to\infty} U_n(z)$$

- Iz enačb sledi z-transformacija verjetnosti *k* zahtev v sistemu:

$$U(z) = B(\lambda - \lambda z)\frac{(1-\rho)(1-z)}{B(\lambda-\lambda z) - z}$$

Pollaczek-Khinchinova enačba

Strežne enote M/G/1 (nad.)

- Primer uporabe enačb za model M/M/1:

$$C_x^2 = \frac{\sigma_x^2}{\overline{x}^2} = \frac{1/\mu^2}{1/\mu^2} = 1$$

$$\overline{N} = \rho + \rho^2 \frac{1 + C_x^2}{2(1-\rho)} = \rho + \rho^2 \frac{1+1}{2(1-\rho)} = \frac{\rho}{1-\rho}$$

- Čas zadrževanja v sistemu:

$$T = \frac{1}{\lambda}\overline{N} = \frac{1}{\lambda}\frac{\rho}{1-\rho} = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

N. Zimic 5-45

Strežne enote M/G/1 (nad.)

- Laplaceova transformacija za eksponentni strežnik je:

$$B(s) = \frac{\mu}{s+\mu} \qquad B(\lambda - \lambda z) = \frac{\mu}{\lambda - \lambda z + \mu}$$

- Z-transformacija verjetnosti k zahtev v sistemu je:

$$U(z) = B(\lambda - \lambda z)\frac{(1-\rho)(1-z)}{B(\lambda - \lambda z) - z} = \frac{1-\rho}{1-\rho z}$$

- Inverzna z-transformacija je stacionarna verjetnost stanja k:

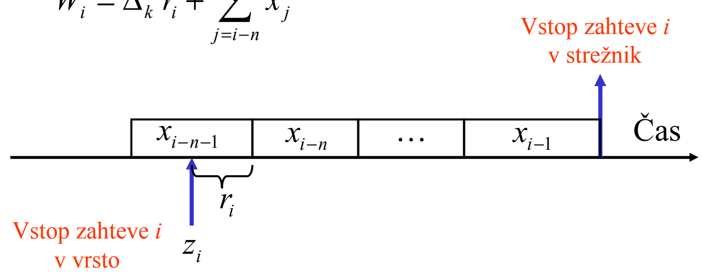
$$\pi_k = (1-\rho)\rho^k$$

N. Zimic 5-46

Strežne enote M/G/1 (nad.)

- Čas zadrževanja zahteve *i* v čakalni vrsti W_i, je sestavljen iz časa strežbe zahtev v vrsti *n* in časa, ki ga potrebuje zahteva v strežniku za dokončanje strežbe (r_i):

$$W_i = \Delta_k \, r_i + \sum_{j=i-n}^{i-1} x_j$$



N. Zimic 5-47

Strežne enote M/G/1 (nad.)

- Povprečje časa zadrževanja zahteve v čakalni vrsti je:

$$\mathrm{E}[W_i] = \mathrm{E}[\Delta_k]\mathrm{E}[r_i] + \mathrm{E}[\sum_{j=i-n}^{i-1} x_j]$$

$$W = \rho \, R_s + \overline{x} N_q$$

$$W = \rho \, R_s + \overline{x} \lambda W$$

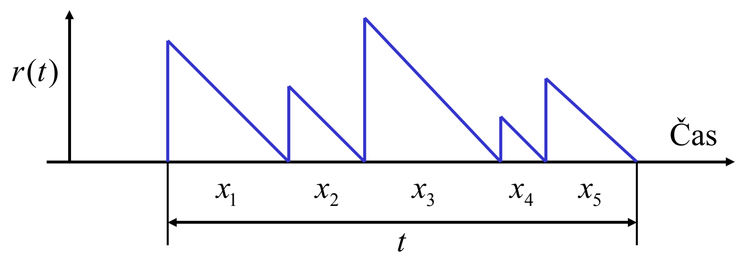
$$W = \frac{\rho \, R_s}{1-\rho}$$

R_s je povprečen čas strežbe zahteve v strežniku ob prihodu nove zahteve v sistem.

N. Zimic 5-48

Strežne enote M/G/1 (nad.)

- Grafičen prikaz ostanka časa $r(t)$ strežbe zahtev v sistemu:



- Povprečen ostanek časa strežbe ob prihodu nove zahteve:

$$R_s = \lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t r(t)}{t}$$

N. Zimic 5-49

Strežne enote M/G/1 (nad.)

- Povprečen ostanek časa strežbe ob prihodu nove zahteve:

$$R_s = \lim_{t\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{m(t)} x_k^2}{2\sum_{k=1}^{m(t)} x_k} = \frac{\overline{x^2}}{2\overline{x}}$$

Kjer je $m(t)$ število zaključenih strežb v času t

- Povprečen čas zadrževanja zahteve v čakalni vrsti je:

$$W = \frac{\lambda \overline{x^2}}{2(1-\rho)} = \rho\overline{x}\,\frac{1+C_x^2}{2(1-\rho)}$$

Pollaczek-Khinchinova enačba

N. Zimic 5-50

Strežne enote M/D/1

- Iz modela M/G/1 je izpeljan tudi model M/D/1, s konstantnim časom strežbe, za katerega velja:

$$\overline{x} = x, \quad \overline{x^2} = x^2, \quad C_x = 0$$

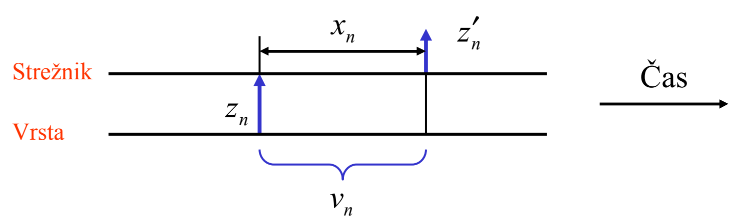
- Iz zgornjega izraza sledi:

$$W = \frac{\lambda x^2}{2(1-\rho)} \qquad T = x + \frac{\lambda x^2}{2(1-\rho)}$$

$$N_q = \frac{\lambda^2 x^2}{2(1-\rho)} \qquad N = \rho + \frac{\lambda^2 x^2}{2(1-\rho)}$$

Distribucija čakalnega časa za sistem M/G/1

- Časovni potek strežbe zahteve z_n:

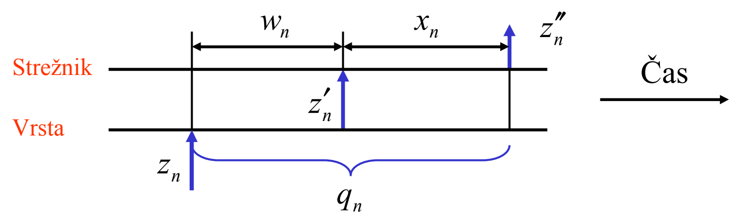


- Z-transformacija števila zahtev, ki vstopijo v času strežbe zahteve, je:

$$V(z) = B(\lambda - \lambda z)$$

Distribucija čakalnega časa za sistem M/G/1 (nad.)

- Časovni potek strežbe zahteve z_n:



- V času zadrževanja zahteve v sistemu v vrsto vstopi q zahtev, zato iz podobnosti s prejšnjo enačbo sledi:

$$Q(z) = S(\lambda - \lambda z)$$

Laplaceova transformacija pri $s = (\lambda - \lambda z)$

N. Zimic

Distribucija čakalnega časa za sistem M/G/1

- Iz Pollaczek-Khinchinove enačbe sledi:

$$S(\lambda - \lambda z) = B(\lambda - \lambda z)\frac{(1-\rho)(1-z)}{B(\lambda - \lambda z) - z}$$

- Pri $s = \lambda - \lambda z$ je:

$$S(s) = B(s)\frac{(1-\rho)(1-z)}{B(s) - z}$$

N. Zimic

Distribucija čakalnega časa za sistem M/G/1

- Z uporabo $z = 1 - s/\lambda$ sledi Laplaceova transformacija porazdelitvene funkcije časa zadrževanja zahteve v sistemu:

$$S(s) = \underbrace{B(s)}_{\text{Strežnik}} \underbrace{\frac{(1-\rho)s}{\lambda B(s) - \lambda + s}}_{\text{Čakalna vrsta}} = B(s)W(s)$$

- Laplaceova transformacija gostote verjetnosti časa zadrževanja v vrsti:

$$W(s) = \frac{(1-\rho)s}{\lambda B(s) - \lambda + s}$$

Strežni sistem G/M/1

- Sistem G/M/1 lahko opazujemo kot dualen sistemu M/G/1.
- Vhodni proces mora biti statistično neodvisen (GI).
- Vhodni proces $N(t)$ ni Markovski.
- Verjetnost stanja k v splošnem ne pomeni verjetnosti k zahtev v sistemu.
- Verjetnost k zahtev v sistemu tik pred prihodom nove zahteve je:

$$r_k = (1-\sigma)\sigma^k, \quad k = 0,1,2,\ldots$$

Strežni sistem G/M/1 (nad.)

- Spremenljivka σ je podana z enačbo:

$$\sigma = A(\mu - \mu\sigma), \quad 0 \le \sigma < 1$$

- Pri čemer je A Laplaceova transformacija porazdelitvene funkcije medprihodnega časa v točki (μ - $\sigma\mu$).
- Verjetnost k zahtev v sistemu je:

$$p_k = \begin{cases} \rho r_{k-1} & k = 1, 2, 3, \ldots \\ 1-\rho & k = 0 \end{cases}$$

V primeru, ko je vhodni proces Poissonov, je verjetnost k zahtev v sistemu ob prihodu nove zahteve r_k enaka verjetnosti, da je v sistemu k zahtev (p_k)

Strežni sistem G/M/1 (nad.)

- Povprečno število zahtev v čakalni vrsti:

$$N_q = \sum_{k=0}^{\infty} k\, p_{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} k \rho (1-\sigma)\sigma^k = \frac{\rho\sigma}{1-\sigma}$$

- Povprečno število zahtev v sistemu:

$$N = \sum_{k=0}^{\infty} k\, p_k = \frac{\rho}{1-\sigma}$$

- Povprečen čas v vrsti in sistemu:

$$W = \frac{N_q}{\lambda} = \frac{\sigma}{\mu(1-\sigma)} \qquad T = \frac{N}{\lambda} = \frac{1}{\mu(1-\sigma)}$$

Strežni sistem E_2/M/1

- Laplaceova transformacija za E_2 je:

$$A(s) = \left(\frac{\lambda}{s+\lambda}\right)^2$$

- Iz enačbe za splošni sistem G/M/1 sledi:

$$\sigma = A(\mu - \mu\sigma) = \left(\frac{\lambda}{\mu - \mu\sigma + \lambda}\right)^2$$

- Rešitev enačbe, ki ustreza pogojem in pri vhodni intenzivnosti λ/2:

$$\sigma = \frac{1 + 4\rho - \sqrt{1 + 8\rho}}{2}$$

N. Zimic 5-59

Strežni sistem E_2/M/1 (nad.)

- Povprečno število zahtev v sistemu E_2/M/1 je:

$$N = \frac{\rho}{(1-\sigma)} = \frac{2\rho}{1 - 4\rho + \sqrt{1 + 8\rho}}$$

- Povprečen čas zadrževanja zahteve v sistemu E_2/M/1 je:

$$T = \frac{N}{\lambda} = \frac{1}{\mu(1-\sigma)} = \frac{2}{\mu(1 - 4\rho + \sqrt{1 + 8\rho})}$$

N. Zimic 5-60

Strežni sistem G/G/1

- Za model G/G/1 ni natančnega izračuna, ampak samo zgornja meja.
- Ocena povprečnega časa zadrževanja zahteve v sistemu:

$$T \le \bar{x} + \frac{\lambda(\sigma_t^2 + \sigma_x^2)}{2(1-\rho)}$$

- Ocena povprečnega števila zahtev v sistemu:

$$N \le \rho + \frac{\lambda^2(\sigma_t^2 + \sigma_x^2)}{2(1-\rho)}$$

N. Zimic 5-61

Strežni sistem G/G/m

- Za model G/G/m prav tako ni natančnega izračuna, ampak samo zgornja meja.
- Ocena povprečnega časa zadrževanja zahteve v sistemu:

$$T \le \bar{x} + \frac{\lambda\left(\sigma_t^2 + \frac{\sigma_x^2}{m}\right)}{2(1-\rho)}$$

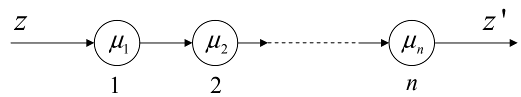
- Ocena povprečnega števila zahtev v sistemu:

$$\bar{N} \le m\rho + \frac{\lambda^2\left(\sigma_t^2 + \frac{\sigma_x^2}{m}\right)}{2(1-\rho)}$$

N. Zimic 5-62

Zaporedna vezava strežnikov

- Zaporedna vezava n strežnikov:



- Laplaceova transformacija gostote verjetnosti zaporedne vezave strežnikov:

$$B(s) = B_1(s)B_2(s)\cdots B_n(s)$$

Zaporedna vezava strežnikov (nad.)

- V primeru, ko so zaporedno vezani strežniki z eksponentno verjetnostno porazdelitvijo, je Laplaceova transformacija gostote verjetnosti:

$$B(s) = \frac{\mu_1}{s+\mu_1}\frac{\mu_2}{s+\mu_2}\cdots\frac{\mu_n}{s+\mu_n}$$

- V primeru q zaporedno vezanih enakih strežnikov:

$$B(s) = \left(\frac{\mu}{s+\mu}\right)^q$$

Zaporedna vezava strežnikov (nad.)

- Koeficient variance veliko pove o naravi strežbe:

$$C_x = \frac{\sigma}{\overline{x}}$$

- Koeficient variance za strežnik z eksponentno verjetnostno porazdelitvijo:

$$C_x = \frac{1/\mu}{\overline{x}} = \frac{1/\mu}{1/\mu} = 1$$

N. Zimic 5-65

Zaporedna vezava strežnikov (nad.)

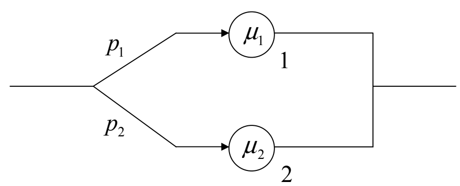
- V primeru, kjer je q zaporedno vezanih enakih strežnikov z eksponentno verjetnostno porazdelitvijo, je koeficient variacij:

$$C_x = \frac{\frac{1}{\sqrt{q\mu^2}}}{\frac{1}{\mu}} = \frac{1}{\sqrt{q}} < 1$$

N. Zimic 5-66

Paralelna vezava strežnikov

- Paralelna vezava dveh strežnikov:



$$p_1 + p_2 = 1$$

- Gostota verjetnosti je:

$$b(x) = p_1 b_1(x) + p_2 b_2(x)$$

- In Laplaceova transformacija gostote verjetnosti:

$$B(s) = p_1 B_1(s) + p_2 B_2(s)$$

Paralelna vezava strežnikov (nad.)

- V primeru paralelne vezave dveh strežnikov z eksponentno verjetnostno porazdelitvijo:

$$b(x) = p_1 \mu_1 e^{-\mu_1 x} + p_2 \mu_2 e^{-\mu_2 x}, \quad x \geq 0$$

$$B(s) = p_1 \frac{\mu_1}{s + \mu_1} + p_2 \frac{\mu_2}{s + \mu_2}$$

- V primeru q paralelno vezanih strežnikov:

$$b(x) = \sum_{i=1}^{q} p_i \mu_i e^{-\mu_i x}, \quad x \geq 0$$

$$B(s) = \sum_{i=1}^{q} p_i \frac{\mu_i}{s + \mu_i}$$

Paralelna vezava strežnikov (nad.)

- Koeficient variacij za q paralelno vezanih strežnikov je:

$$C_x^2 = \frac{2\sum_{i=1}^{q} \frac{p_i}{\mu_i^2}}{\overline{x}} - 1$$

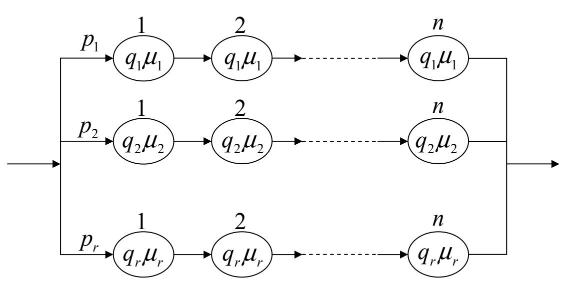
- Iz česar sledi:

$$\left(\sum_{i=1}^{q} \frac{p_i}{\mu_i} \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{q} p_i \right) \left(\sum_{i=1}^{q} \frac{p_i}{\mu_i^2} \right)$$

$$C_x > 1$$

Mešana vezava strežnikov

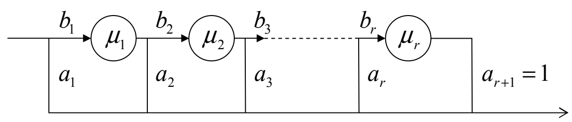
- Mešana vezava strežnikov tipa M:



$$B(s) = \sum_{i=1}^{r} p_i \left(\frac{q_i \mu_i}{s + q_i \mu_i} \right)^n$$

Verižna vezava strežnikov

- Verižna vezava strežnikov tipa M:



- Laplaceova transformacija gostote verjetnosti verižne vezave strežnikov:

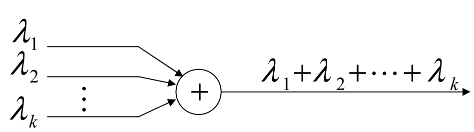
$$B(s) = a_1 + \sum_{i=1}^{r} a_{i+1} \prod_{j=1}^{i} b_j \frac{\mu_j}{s + \mu_j}$$

Strežne mreže

N. Zimic

Združitev Poissonovih procesov

- Združitev procesov z Poissonovo verjetnostno porazdelitvijo vodi do Poissonovega procesa:



- Z-transformacija Poissonovega procesa je:

$$P(z)=e^{-\lambda t(1-z)}$$

Združitev Poissonovih procesov (nad.)

- Združitev procesov s Poissonovo verjetnostno porazdelitvijo vodi do konvolucije v časovnem prostoru, oziroma do produkta v frekvenčnem prostoru:

$$P(z) = P_1(z)P_2(z)\cdots P_k(z) = e^{-\lambda_1 t(1-z)}e^{-\lambda_2 t(1-z)}\cdots e^{-\lambda_k t(1-z)}$$

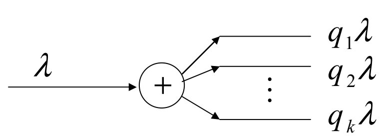
$$P(z) = e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k)t(1-z)}$$

- Kar je Poissonov proces z intenzivnostjo λ:

$$\lambda = (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k)$$

Razdružitev Poissonovih procesov

- Razdružitev procesov s Poissonovo verjetnostno porazdelitvijo vodi do Poissonovih procesov:

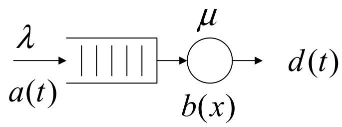


- Pri čemer je gostota verjetnosti i-tega procesa:

$$b_i(x) = q_i \lambda e^{-q_i \lambda t}$$

Verjetnostna porazdelitev na izhodu strežnika M/M/1

- Strežnik z gostoto verjetnosti na vhodu $a(t)$, strežbo $b(x)$ in na izhodu $d(t)$:



- Ko prihajajoča zahteva naleti na zaseden strežnik, je izhodna verjetnostna porazdelitev enaka verjetnostni porazdelitvi strežbe:

$$D(s) = B(s)$$

N. Zimic 6-5

Verjetnostna porazdelitev na izhodu strežnika M/M/1 (nad.)

- Ko prihajajoča zahteva naleti na prost strežnik, je izhodna verjetnostna porazdelitev odvisna od vhodne verjetnostne porazdelitve in verjetnostne porazdelitve strežbe:

$$D(s) = A(s)B(s) = \frac{\lambda}{s+\lambda}\frac{\mu}{s+\mu}$$

- Verjetnost prazne enote je 1-ρ, iz česar sledi Laplaceva transformacija gostote verjetnosti na izhodu strežnika:

$$D(s) = (1-\rho)A(s)B(s) + \rho B(s)$$

N. Zimic 6-6

Verjetnostna porazdelitev na izhodu strežnika M/M/1 (nad.)

- Sledi:

$$D(s) = B(s)\left((1-\rho)A(s)+\rho\right) = B(s)\left(\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\frac{\lambda}{s+\lambda}+\frac{\lambda}{\mu}\right)$$

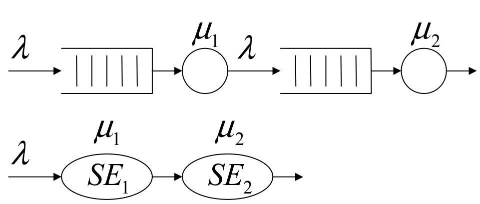
$$D(s) = B(s)\left(\frac{\lambda\mu-\lambda^2+s\lambda+\lambda^2}{\mu(s+\lambda)}\right)$$

- Iz česar sledi, da je izhodna verjetnostna porazdelitev enaka vhodni Poissonovi porazdelitvi:

$$D(s) = \frac{\mu}{s+\mu}\left(\frac{\lambda(s+\mu)}{\mu(s+\lambda)}\right) = \frac{\lambda}{(s+\lambda)} = A(s)$$

Serijska vezava dveh strežnih enot

- Serijska vezava dveh strežnih enot:



- Čas zadrževanja zahteve v obeh strežnikih in varianca je:

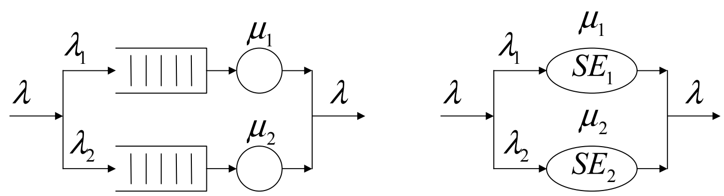
$$T_{12} = T_1(\lambda)+T_2(\lambda)$$

$$\sigma_{T12}^2 = \sigma_{T1}^2(\lambda)+\sigma_{T2}^2(\lambda)$$

$T_1(\lambda_1)$ in $T_2(\lambda_2)$ sta povprečna časa zadrževanja zahteve v prvem, oziroma drugem strežniku

Paralelna vezava dveh strežnih enot

- Paralelna vezava dveh strežnih enot:



- Vhodna intenzivnost se razdeli na dva dela:

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$$

N. Zimic 6-9

Paralelna vezava dveh strežnih enot (nad.)

- Verjetnost, da gre zahteva na prvo, oziroma drugo strežno enoto je:

$$p_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda}, \quad p_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda}$$

- Povprečen čas zadrževanja zahteve v strežnikih je:

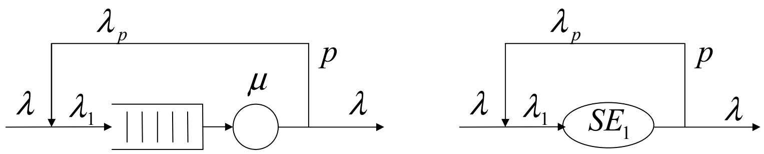
$$T_{12} = p_1 T_1(\lambda_1) + p_2 T_2(\lambda_2)$$

$T_1(\lambda_1)$ in $T_2(\lambda_2)$ sta povprečna časa zadrževanja zahteve v prvem, oziroma drugem strežniku

N. Zimic 6-10

Strežna enota z delno vrnitvijo zahtev v strežbo

- Strežna enota z delno vrnitvijo zahtev v strežbo:



- Intenzivnost prihajanja zahtev na vhodu strežne enote je:

$$\lambda_1 = \lambda + \lambda_p$$

- Povratna intenzivnost je:

$$\lambda_p = \lambda_1 p$$

Strežna enota z delno vrnitvijo zahtev v strežbo (nad.)

- Iz česar izhaja notranja intenzivnost:

$$\lambda_1 = \frac{\lambda}{1-p}$$

- Čas zadrževanja v strežni enoti je:

$$T(\lambda_1) = T\left(\frac{\lambda}{1-p}\right)$$

Povečana vhodna intenzivnost strežne enote

- Celoten čas zadrževanja je:

$$T = \frac{T(\lambda_1)}{1-p} = \frac{T\left(\frac{\lambda}{1-p}\right)}{1-p}$$

Zahteva se vrača v strežno enoto

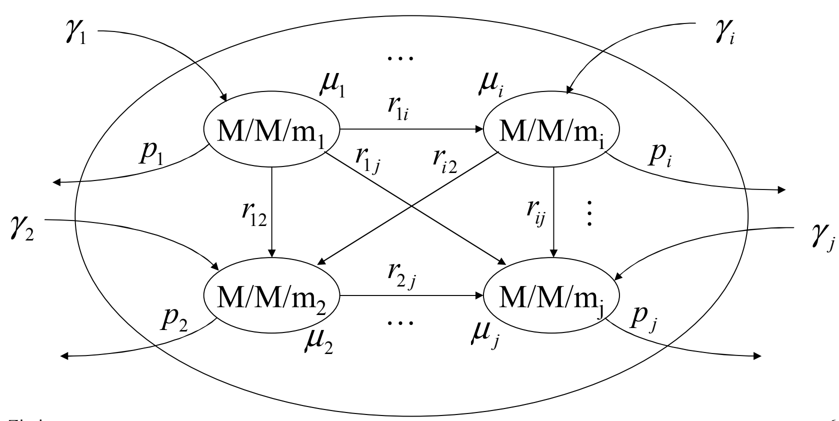
Strežne mreže

- Na prejšnjih prosojnicah je bilo pokazano, da je izhod strežne enote M/M/1 proces z Poissonovo verjetnostno porazdelitvijo.

- V primeru strežne enote M/M/m je izhod prav tako proces s Poissonovo verjetnostno porazdelitvijo z intenzivnostjo λ. Omenjena trditev velja le v primeru strežne discipline prvi pride, prvi je postrežen (FCFS).

Strežne mreže (nad.)

- Primer strežne mreže:



Strežne mreže (nad.)

- Strežna mreža vsebuje N strežnih enot z intenzivnostjo strežbe μ_i.
- Intenzivnost porojevanja zahtev na vhodu posamezne strežne enote je λ_i.
- Verjetnost prehoda zahteve iz enote i v enoto j je r_{ij}.
- Verjetnost, da zahteva iz enote i zapusti strežno mrežo je:

$$p_i = 1 - \sum_{j=1}^{N} r_{ij}$$

Strežne mreže (nad.)

- Intenzivnost prihajanja zahtev v enoto i je:

$$\lambda_i = \gamma_i + \sum_{j=1}^{N} \lambda_j r_{ji}$$

Če strežna enota ni v nasičenju, je izhodna intenzivnost enaka vhodni intenzivnosti

- Da je sistem ergodičen mora veljati, da je intenzivnost na vhodu posameznega strežnika manjša od intenzivnosti strežbe:

$$\lambda_i < m_i \mu_i$$

Strežne mreže (nad.)

- Če so vse vhodne intenzivnosti $\gamma_i = 0$ je to avtonomna zaprta ali zaključena strežna mreža.
- V primeru, da je v strežbi samo en tip zahtev, je to homogena strežna mreža, sicer je strežna mreža nehomogena.
- Strežni sistem se opiše z vektorjem populacije zahtev, kjer posamezen element vektorja vsebuje število zahtev v strežni enoti:

$$\boldsymbol{k} = (k_1, k_2, ..., k_N)$$

N. Zimic 6-17

Strežne mreže (nad.)

- Pri analizi takšnih strežnikov se predpostavlja statistična neodvisnost:

$$\pi(\boldsymbol{k}) = \pi(k_1, k_2, ..., k_N) = \pi_1(k_1)\pi_2(k_2)...\pi_N(k_N)$$

- V primeru, da je v strežni mreži K zahtev, mora veljati:

$$K = \sum_{i=1}^{N} k_i$$

Iz omenjenega izraza izhaja, da stanja niso enostavno statistično neodvisna

- Število različnih vektorjev, oziroma stanj v sistemu je:

$$M = \binom{N+K-1}{N-1}$$

N. Zimic 6-18

Strežne mreže (nad.)

- Normalizacijska konstanta za strežno mrežo, kjer je A množica vseh možnih stanj mreže pri K zahtevah, je:

$$G(K) = \sum_{k \in A} \prod_{i=1}^{N} F_i(k_i)$$

- $F_i(k_i)$ je funkcija, ki je v relaciji z verjetnostjo k_i zahtev v strežniku i, pri intenzivnosti prihajanja zahtev e_i:

$$F_i(k_i) = \frac{e_i^{k_i}}{\mu_i(1)\mu_i(2)\ldots\mu_i(k_i)}$$

$\mu_i(j)$ je intenzivnost strežbe i-te strežne enote, če je v njej j zahtev

- Če v strežni enoti ni zahtev, velja $F_i(0)=1$.

Strežne mreže (nad.)

- Verjetnost, da je strežna mreža v stanju $\boldsymbol{k} = (k_1,k_2,\ldots,k_N)$:

$$\pi(\boldsymbol{k}) = \frac{F_1(k_1)F_2(k_2)\ldots F_N(k_N)}{G(K)}$$

- Normalizacijska konstanta za K-k elementov, kjer je vsaj en element v strežni enoti i:

$$F_i(1)G(K-k-1)$$

- Normalizacijska konstanta, kjer ni nobenega elementa v strežni enoti i:

$$G(K-k) - F_i(1)G(K-k-1)$$

Strežne mreže (nad.)

- Verjetnost, da je v strežni enoti *i k* zahtev, je:

$$\pi_i(k) = F_i(k)\frac{G(K-k) - F_i(1)G(K-k-1)}{G(K)}$$

- Po definiciji je normalizacijska konstanta, ko je število elementov v strežni mreži manjše od nič, enaka nič:

$$G(h) = 0, \quad h < 0$$

N. Zimic 6-21

Strežne mreže (nad.)

- Za izračun $G(k)$ se lahko uporabi konvolucijski algoritem, kjer indeks j pomeni število strežnih enot:

$$G_j(k) = G_{j-1}(k) + y_j G_j(k-1)$$

- Povprečno število zahtev v strežni enoti je:

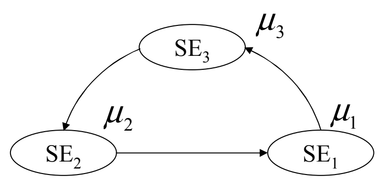
$$\overline{N}_i = \sum_{k=1}^{K} k\,\pi_i(k)$$

$$\overline{N}_i = \sum_{k=1}^{K} k\,F_i(k)\frac{G(K-k) - F_i(1)G(K-k-1)}{G(K)}$$

N. Zimic 6-22

Primer strežne mreže

- Podan je sistem s tremi strežnimi enotami M/M/1. Kakšna je verjetnost da je v prvem strežniku ena zahteva, če sta v sistemu dve zahtevi?



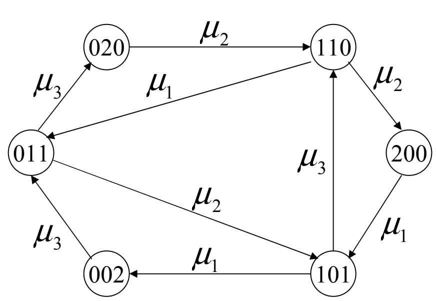
$$e_1 = e_2 = e_3 = 1$$

- Število stanj v strežni mreži je:

$$M = \binom{N+K-1}{N-1} = \binom{3+2-1}{3-1} = \binom{4}{2} = \frac{4!}{(4-2)!2!} = 6$$

Primer strežne mreže (nad.)

- Diagram prehajanja stanj:



abc

a - strežna enota 1
b - strežna enota 2
c - strežna enota 3

Primer strežne mreže (nad.)

- Ravnotežne enačbe:

$$\mu_1\pi(2,0,0) = \mu_2\pi(1,1,0)$$
$$\mu_2\pi(0,2,0) = \mu_3\pi(0,1,1)$$
$$\mu_3\pi(0,0,2) = \mu_1\pi(1,0,1)$$
$$\mu_1\pi(1,1,0) + \mu_2\pi(1,1,0) = \mu_2\pi(0,2,0) + \mu_3\pi(1,0,1)$$
$$\mu_2\pi(0,1,1) + \mu_3\pi(0,1,1) = \mu_3\pi(0,0,2) + \mu_1\pi(1,1,0)$$
$$\mu_3\pi(1,0,1) + \mu_1\pi(1,0,1) = \mu_2\pi(0,1,1) + \mu_1\pi(2,0,0)$$

N. Zimic 6-25

Primer strežne mreže (nad.)

- Rešitev sistema enačb:

$$\pi(1,0,1) = \frac{\mu_1}{\mu_3}\pi(2,0,0) \qquad \pi(0,0,2) = \frac{\mu_1^2}{\mu_3^2}\pi(2,0,0)$$

$$\pi(1,1,0) = \frac{\mu_1}{\mu_2}\pi(2,0,0) \qquad \pi(0,2,0) = \frac{\mu_1^2}{\mu_2^2}\pi(2,0,0)$$

$$\pi(0,1,1) = \frac{\mu_1^2}{\mu_2\mu_3}\pi(2,0,0)$$

$$\pi(2,0,0) = \left(1 + \frac{\mu_1}{\mu_2} + \frac{\mu_1}{\mu_3} + \frac{\mu_1^2}{\mu_2\mu_3} + \frac{\mu_1^2}{\mu_2^2} + \frac{\mu_1^2}{\mu_3^2}\right)^{-1}$$

N. Zimic 6-26

Primer strežne mreže (nad.)

- Verjetnost ene zahteve v prvi strežni enoti je:

$$\pi_1(1) = \pi(1,1,0) + \pi(1,0,1) = \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} + \frac{\mu_1}{\mu_3}\right)\pi(2,0,0)$$

$$\pi_1(1) = \frac{\frac{\mu_1}{\mu_2} + \frac{\mu_1}{\mu_3}}{1 + \frac{\mu_1}{\mu_2} + \frac{\mu_1}{\mu_3} + \frac{\mu_1^2}{\mu_2\mu_3} + \frac{\mu_1^2}{\mu_2^2} + \frac{\mu_1^2}{\mu_3^2}}$$

Primer strežne mreže (nad.)

- Funkcije $F_i(k)$ za podani sistem so:

$$F_1(1) = \frac{1}{\mu_1}, \quad F_1(2) = \frac{1}{\mu_1\mu_1}$$

$$F_2(1) = \frac{1}{\mu_2}, \quad F_2(2) = \frac{1}{\mu_2\mu_2}$$

$$F_3(1) = \frac{1}{\mu_3}, \quad F_3(2) = \frac{1}{\mu_3\mu_3}$$

- Množica vseh stanj v strežni mreži je:

$$A = \{(0,0,2),(0,2,0),(2,0,0),(0,1,1),(1,1,0),(1,0,1)\}$$

Primer strežne mreže (nad.)

- Normalizacijska konstanta $G(2)$ je:

$$G(K) = \sum_{k \in A} \prod_{i=1}^{N} F_i(k_i)$$

$$G(2) = \frac{1}{\mu_3^2} + \frac{1}{\mu_2^2} + \frac{1}{\mu_1^2} + \frac{1}{\mu_2 \mu_3} + \frac{1}{\mu_1 \mu_2} + \frac{1}{\mu_1 \mu_3}$$

- In normalizacijska konstanta $G(1)$ je:

$$G(1) = \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_3}$$

N. Zimic 6-29

Primer strežne mreže (nad.)

- Verjetnost ene zahteve v prvi strežni enoti:

$$\pi_1(1) = F_1(1)\frac{G(2-1) - F_1(1)G(0)}{G(2)} = F_1(1)\frac{G(1) - F_1(1)}{G(2)}$$

$$\pi_1(1) = F_1(1)\frac{F_2(1) + F_3(1)}{G(2)}$$

$$\pi_1(1) = \frac{\frac{\mu_1}{\mu_2} + \frac{\mu_1}{\mu_3}}{1 + \frac{\mu_1}{\mu_2} + \frac{\mu_1}{\mu_3} + \frac{\mu_1^2}{\mu_2 \mu_3} + \frac{\mu_1^2}{\mu_2^2} + \frac{\mu_1^2}{\mu_3^2}}$$

N. Zimic 6-30

Modeli procesiranja

N. Zimic

Prioritete procesiranja

- Strežna disciplina je način, ki določa, katera zahteva se bo naslednja procesirala. Odločitev o procesiranju lahko temelji na naslednjih pogojih:
  - na neki meri, ki je v relaciji s časom prihoda v čakalno vrsto,
  - na neki meri, ki temelji na potrebnem času za procesiranje prispele zahteve, oziramo na času, ki ga je zahteva že prejela,
  - na osnovi pripadnosti grupam.

- Pripadnosti grupam pogosto vodijo do prioritet procesiranja.

Prioritete procesiranja (nad.)

- Najbolj pogoste strežne discipline so:
  1. FCFS - kdor prvi pride je prvi postrežen,
  2. LCFS - kdor zadnji pride je prvi postrežen,
  3. SJF - najkrajši posel je prvi postrežen,
  4. LJF - najdaljši posel je prvi postrežen,
  5. HOL - na začetek vrste (v prioritetnem sistemu)
- Prioritete so opisane s prioritetnimi razredi (P). Indeks p=1,2,...,P pomeni prioriteto, kjer višja številka pomeni višjo prioriteto.
- Ločimo dve vrsti prioritet: prekinitveni in neprekinitveni.

Prioritete procesiranja (nad.)

- Za splošen sistem M/G/1 velja, da je verjetnostna porazdelitev za prioritetni razred p Poissonova z intenzivnostjo λ_p.
- Vsaka zahteva prejme čas procesiranja $\overline{x}_p$ porazdeljenega po porazdelitveni funkciji $B(x)$.
- Velja:

$$\lambda = \sum_{p=1}^{P} \lambda_p$$

$$\overline{x} = \sum_{p=1}^{P} \frac{\lambda_p}{\lambda} \overline{x}_p$$

Prioritete procesiranja (nad.)

- Velja:

$$\rho_p = \lambda_p \overline{x}_p$$

$$\rho = \lambda \, \overline{x} = \sum_{p=1}^{P} \rho_p$$

- Povprečni čas zadrževanja zahteve *p* v strežni enoti je:

$$T_p = W_p + \overline{x}_p$$

W_p = E(čas zadrževanja zahteve s prioriteto *p* v čakalni vrsti)
T_p = E(čas zadrževanja zahteve s prioriteto *p* v strežni enoti)

Neprekinitveni model procesiranja

- Za neprekinitveni model procesiranja velja, da zahteva z višjo prioriteto ne prekine strežbe zahteve z nižjo prioriteto. Čas prebivanja zahteve s prioriteto *p* v čakalni vrsti je sestavljen iz:
  - časa, da se postreže zahteva, ki je trenutno v strežniku
  - časa, da se postrežejo zahteve z višjimi in enakimi prioritetami, ki so v čakalni vrsti,
  - časa, da se postrežejo zahteve višjih prioritet, ki so prišle v vrsto med čakanjem opazovane zahteve.
- Čas strežbe zahteve, ki je trenutno v strežniku je:

$$W_0 = \sum_{i=1}^{P} \rho_i \frac{\overline{x_i^2}}{2\overline{x}_i} = \sum_{i=1}^{P} \frac{\lambda_i \overline{x_i^2}}{2}$$

Neprekinitveni model procesiranja (nad.)

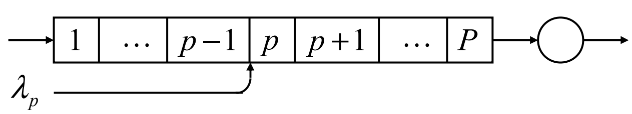
- N_{ip} je število zahtev prioritet i, ki so v sistemu ob prihodu zahteve s prioriteto p in so postrežene pred opazovano zahtevo,
- M_{ip} je število zahtev prioritete i, ki vstopijo v sistem v času čakanja opazovane zahteve in so postrežene pred opazovano zahtevo.

- Sledi:

$$W_p = W_0 + \sum_{i=1}^{P} \bar{x}_i (\bar{N}_{ip} + \bar{M}_{ip})$$

Neprekinitveni model procesiranja (nad.)

- Sistem HOL (Head Of Line):



- Za HOL velja:

$$\bar{N}_{ip} = 0, \quad i = 1, 2, ..., p-1$$
$$\bar{M}_{ip} = 0, \quad i = 1, 2, ..., p$$
$$\bar{N}_{ip} = \lambda_i W_i, \quad i = p, p+1, ..., P$$
$$\bar{M}_{ip} = \lambda_i W_p, \quad i = p+1, p+2, ..., P$$

Neprekinitveni model procesiranja (nad.)

- Sledi:

$$W_p = W_0 + \sum_{i=p}^{P} \overline{x}_i \lambda_i W_i + \sum_{i=p+1}^{P} \overline{x}_i \lambda_i W_p$$

- Enačba časa zadrževana zahteve v čakalni vrsti za sistem HOL:

$$W_p = \frac{W_0 + \sum_{i=p+1}^{P} \rho_i W_i}{1 - \sum_{i=p}^{P} \rho_i}, \quad p = 1, 2, .., P$$

Neprekinitveni model procesiranja (nad.)

- Čas čakanja v vrsti za zahteve z najvišjo prioriteto (P):

$$W_P = \frac{W_0}{1 - \rho_P}$$

- Čas čakanja v vrsti za zahteve s prioriteto P-1:

$$W_{P-1} = \frac{W_0}{(1 - \rho_P)(1 - \rho_P - \rho_{P-1})}$$

Neprekinitveni model procesiranja (nad.)

- Enačba se rešuje rekurzivno. Za poenostavitev zapisa se uvede delna uporabnost:

$$u_p = \sum_{i=p}^{P} \rho_i$$

- Sledi enačba časa zadrževana zahteve v čakalni vrsti za sistem HOL:

$$W_p = \frac{W_0}{(1-u_p)(1-u_{p+1})}, \quad p = 1, 2, .., P$$

N. Zimic 7-11

Neprekinitveni model procesiranja (nad.)

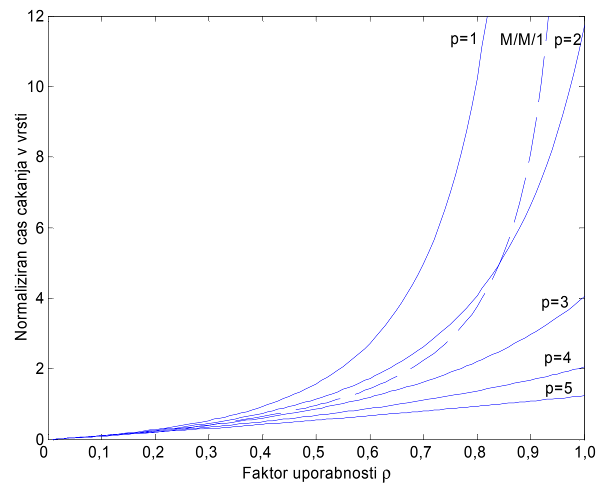
- Graf na naslednji prosojnici prikazuje normirane čase čakanja zahteve v vrsti $W_0 / \bar{x}$ v odvisnosti od faktorja uporabnosti ρ. Primer prikazuje sistem s petimi prioritetnimi razredi, katerih verjetnostna porazdelitev je eksponentna.
- Vhodne intenzivnosti posamezne prioritete so enake:

$$\lambda_p = \frac{\lambda}{5}$$

- Za primerjavo je prikazan tudi čas čakanja v čakalni vrsti za model M/M/1.

N. Zimic 7-12

Neprekinitveni model procesiranja (nad.)



N. Zimic 7-13

Prekinitveni model procesiranja

- Za prekinitveni model procesiranja velja, da zahteva z višjo prioriteto prekine strežbo zahteve z nižjo prioriteto. Čas prebivanja zahteve (p) v strežni enoti je sestavljen iz:
  - povprečnega časa procesiranja zahteve prioritete p
  - ostanka procesorskega časa deležev zahtev višjih prioritet, ki so že v sistemu:

$$\frac{\sum_{i=p}^{P} \frac{\lambda_i \overline{x^2}}{2}}{(1-u_p)}$$

N. Zimic 7-14

Prekinitveni model procesiranja (nad.)

– časa procesiranja zahtev, ki pridejo v sistem v času procesiranja opazovane zahteve:

$$\sum_{i=p+1}^{P} \rho_i T_p = \sum_{i=p+1}^{P} \overline{x}_i \lambda_i T_p$$

- Čas zadrževanja zahteve s prioriteto p v strežni enoti je:

$$T_p = \overline{x}_p + \frac{\sum_{i=p}^{P} \frac{\lambda_i \overline{x^2}}{2}}{(1-u_p)} + \sum_{i=p+1}^{P} \rho_i T_p$$

N. Zimic 7-15

Prekinitveni model procesiranja (nad.)

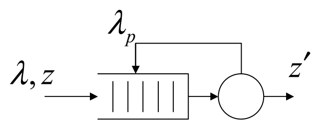
- Iz predhodne enačbe se izrazi čas zadrževanja zahteve s prioriteto p v strežni enoti:

$$T_p = \frac{\overline{x}_p (1-u_p) + \sum_{i=p}^{P} \frac{\lambda_i \overline{x^2}}{2}}{(1-u_p)(1-u_{p+1})}$$

N. Zimic 7-16

Računalniški sistemi z dodeljevanjem časa

- Model računalniškega sistema z dodeljevanjem časa:



- Pri dodeljevanju časa zahteva v strežniku prejme delež procesiranja q_{pn} in se po tem delno obdelana ponovno vrne v čakalno vrsto:
  - q_{pn}: delež časa procesiranja, ki ga zahteva prioritete p prejme ob n-tem vstopu v strežnik.
- V primeru brez prioritet je delež časa procesiranja $q_{pn} = q_n$.

Računalniški sistemi z dodeljevanjem časa (nad.)

- Način dodeljevanja časa je določen z načinom razporejanja zahtev in delno postreženih zahtev v čakalni vrsti.
- Čas zadrževanja v sistemu je:

$$T(x) = W(x) + x$$

- Pri čemer je x čas strežbe zahteve (koristni čas).
- $W(x)$ čas zadrževanja zahteve v čakalni vrsti (nekoristni čas):

$$W(x) = T(x) - x$$

Računalniški sistemi z dodeljevanjem časa (nad.)

- Pogojna porazdelitev časa zadrževanja zahteve v sistemu je:

$$S(y|x) = P[Y \le y | X = x]$$

  - Y je slučajna spremenljivka časa zadrževanja zahteve v sistemu
  - X je slučajna spremenljivka časa procesiranja zahteve.
- Definirajmo:
  - $N(x)$ = povprečno število zahtev v čakalni vrsti, ki so prejeli čas procesiranja x,
  - $n(x)$ = povprečna gostota zahtev v sistemu, ki so prejeli čas procesiranja x.

N. Zimic 7-19

Računalniški sistemi z dodeljevanjem časa (nad.)

- Za sistem, kjer je delež časa procesiranja $q_i > 0$ velja, da je zahteva v n delnih procesiranjih v strežniku prejela strežni čas:

$$Q_n = \sum_{i=1}^{n} q_i$$

- Vsaka zahteva, ki je prejela $Q_{n-1} < x \le Q_n$ strežnega časa, je v sistemu čakala $W(x)$ časa:

$$W(x) = W(Q_n)$$

N. Zimic 7-20

Računalniški sistemi z dodeljevanjem časa (nad.)

- Povratna intenzivnost prihajanja zahtev v sistem λ_p je odvisna od porazdelitvene funkcije strežbe:

$$\lambda_p = \lambda[1 - B(x)]$$

- Čas prebit v čakalni vrsti med dvema procesiranima je: $W(Q_n) - W(Q_{n-1})$, kar po Littlovem pravilu daje število zahtev v čakalni vrsti v n-tem koraku procesiranja:

$$N(Q_n) = \lambda[1 - B(x)](W(Q_n) - W(Q_{n-1}))$$

Računalniški sistemi z dodeljevanjem časa (nad.)

- V limitnem procesu, ko gre delež procesiranja q_n proti nič, sledi:

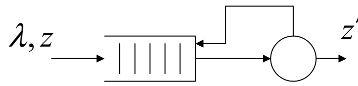
$$n_q(x) = \lambda[1 - B(x)]\frac{dW(x)}{dx}$$

- Z upoštevanjem celotnega časa prebitega v sistemu $T(x)$, dobimo celotno število zahtev v sistemu, ki so prejele delež procesiranja x:

$$n(x) = \lambda[1 - B(x)]\frac{dT(x)}{dx}$$

Model paketnega procesiranja

- Model paketnega procesiranja:



- Ko se zahteva delno postreže, se vrne v glavo čakalne vrste in se ponovno vrne v strežbo. Ker zahteva prejme celoten čas procesiranja po delih brez prekinitev, je možna primerjava z modelom M/G/1.
- Čas zadrževanja v sistemu je vsota vseh strežnih časov zahtev pred opazovano zahtevo ter strežba opazovane zahteve.

N. Zimic 7-23

Model paketnega procesiranja (nad.)

- Čas zadrževanja v sistemu je:

$$T(x) = \frac{W_0}{1-\rho} + x \qquad W_0 = \frac{\lambda \overline{x^2}}{2}$$

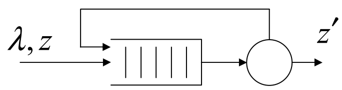
- Ker čas zadrževanja v čakalni vrsti $W(x)$ ni odvisen od časa strežbe x, sistem ni diskriminacijski glede na čas strežbe.

$$W(x) = \frac{W_0}{1-\rho} = \frac{\lambda \overline{x^2}}{2(1-\rho)}$$

N. Zimic 7-24

Model “Round Robin”

- Model z dodeljevanjem časa “Round Robin”:



- Zahteva se delno postreže in ponovno vrne v čakalno vrsto.
- Vsaka zahteva prejme enak delež procesiranja.
- Če je $n(x)$ povprečna gostota zahtev, ki so prejele čas procesiranja x, potem je povprečna gostota zahtev po času Δx:

$$n(x+\Delta x) = n(x)[1-\mu(x)\,\Delta x] + o(\Delta x)$$

Model “Round Robin” (nad.)

- Rezultat limitnega procesa (Δx→0) je:

$$\frac{dn(x)}{dx} = -\mu(x)\,n(x)$$

- Rešitev diferencialne enačbe je:

$$n(x) = n(0)[1-B(x)]$$

- Z upoštevanjem splošne enačbe za dodeljevanje časa sledi:

$$\frac{dT(x)}{dx} = \frac{n(0)}{\lambda}$$

Model “Round Robin” (nad.)

- Ker je $T(0)=0$, sledi:

$$T(x) = \frac{n(0)}{\lambda} x$$

- Če opazujemo zahtevo za katero velja $x \to \infty$, se bodo vse ostale zahteve postregle pred njo. Zato velja enačba za prekinitveni sistem z disciplino razporejanja v čakalni vrsti HOL:

$$T(x) = \frac{x(1-\rho) + W_0}{(1-\rho)^2}$$

Model “Round Robin” (nad.)

- V limitnem procesu $x \to \infty$ je:

$$\lim_{x\to\infty} T(x) = \frac{x}{1-\rho}$$

- Iz podane enačbe se izračuna $n(0)$. Povprečen čas zadrževanja zahteve v sistemu RR je:

$$T(x) = \frac{x}{1-\rho}$$

- Povprečen čas zadrževanja zahteve v vrsti:

$$W(x) = \frac{\rho x}{1-\rho}$$

Model “Round Robin” (nad.)

- Čas zadrževanja v strežni enoti je linearno odvisen od strežnega časa.
- Čas zadrževanja v strežni enoti je neodvisen od porazdelitvene funkcije strežbe $B(x)$. Čas je odvisen samo od faktorja uporabnosti strežne enote:

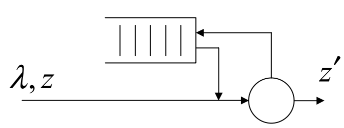
$$\rho = \lambda \bar{x}$$

- Čas zadrževanja v čakalni vrsti je linearno odvisen od časa strežbe:

$$\frac{W(x)}{x} = \frac{\rho}{1-\rho}$$

Model “LCFS”

- Pri modelu “LCFS” nova zahteva prekine zahtevo, ki je trenutno v strežniku in jo postavi v glavo čakalne vrste. Ko se konča strežba trenutne zahteve, pride na vrsto zahteva v glavi čakalne vrste:



- Čas zadrževanja v sistemu je sestavljen:
  - časa strežbe na strežniku,
  - časa prebivanja v čakalni vrsti.

Model “LCFS” (nad.)

- Čas čakanja v čakalni vrsti je odvisen od:
  - števila zahtev, ki bodo prispele v času strežbe opazovane zahteve,
  - povprečnega časa strežbe zahteve, ki vstopijo v strežno enoto med prebivanjem opazovane zahteve v sistemu.

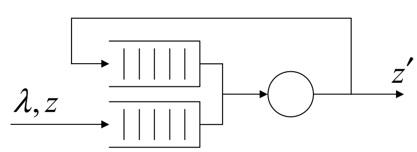
$$W(x) = \lambda x \frac{\overline{x}}{1-\rho}$$

- Čas zadrževanja zahteve v sistemu je enak kot pri modelu RR:

$$T(x) = \frac{x}{1-\rho}$$

Model procesiranja z ospredjem in ozadjem

- Model procesiranja z ospredjem in ozadjem temelji na dodeljevanju časa.
- Favorizira programe, ki zahtevajo krajši čas procesiranja.
- Sestavljen je iz dveh čakalnih vrst:
  - čakalno vrsto za novo prispele zahteve,
  - čakalno vrsto za delno obdelane zahteve.



Model procesiranja z ospredjem in ozadjem (nad.)

- Novo prispela zahteva se procesira delček časa in se postavi v drugo čakalno vrsto.
- V drugi čakalni vrsti so zahteve urejene po prejetem času procesiranja. Zahteva, ki je prejela najmanjši delež procesorskega časa, je prva v vrsti za procesiranje.
- Na opazovano zahtevo s strežnim časom x vplivajo samo tiste zahteve, ki so prejele delež procesiranja, ki je manjši od x. Porazdelitvena funkcija strežbe je:

$$B_x(y) = \begin{cases} B(y), & y < x \\ 1, & y \geq x \end{cases}$$

Model procesiranja z ospredjem in ozadjem (nad.)

- N-ti moment strežnega časa je:

$$\overline{x_x^n} = \int_0^x y^n dB(y) + x^n[1 - B(x)]$$

- Faktor uporabnosti je:

$$\rho_x = \lambda \overline{x}_x$$

- Ko gre čas proti neskončnosti velja:

$$\overline{x_\infty^n} = \overline{x^n} \qquad \rho_\infty = \rho$$

- Z uporabo modela M/G/1 in discipline FCFS velja:

$$W_x = \frac{\lambda \overline{x_x^2}}{2(1 - \rho_x)}$$

Model procesiranja z ospredjem in ozadjem (nad.)

- Celoten čas prebivanja zahteve v sistemu je:

$$T(x) = W_x + x + \lambda T(x)\overline{x}_x$$

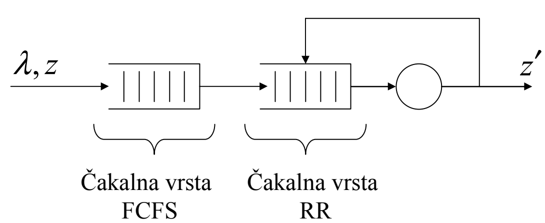
Potreben čas strežbe za vse zahteve, ki vstopijo v sistem v času zadrževanja opazovane zahteve v sistemu

- Iz zgornje enačbe sledi:

$$T(x) = \frac{W_x + x}{1 - \rho_x}$$

Model za sebično procesiranje

- Model za sebično procesiranje je sestavljen iz dveh delov:
  - čakalne vrste (FCFS), v katero vstopajo zahteve,
  - strežne enote, ki deluje po sistemu dodeljevanja časa (RR).



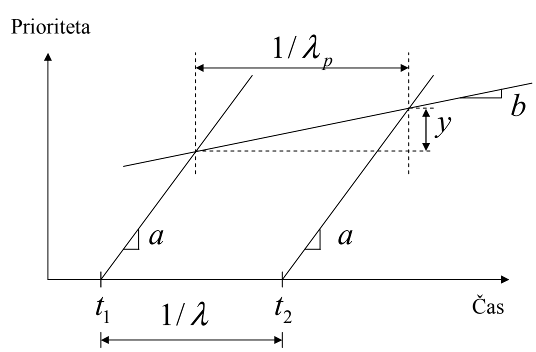
Model za sebično procesiranje (nad.)

- Model sestavljajo dva faktorja povečevanja prioritet:
  - a - faktor povečevanja prioritete v vrsti FCFS
  - b - faktor povečevanja prioritete v vrsti RR
- Prioriteta zahteve je produkt časa prebitega v čakalni vrsti in faktorja povečevanja prioritete.
- Ko se prioriteta zahteve v čakalni vrsti FCFS izenači s prioriteto zahtev v čakalni vrsti RR, se zahteva premakne v vrsto RR.
- Smiselni faktorji prioritet so:

$$0 \le b \le a$$

Model za sebično procesiranje (nad.)

- Slika prehajanja zahtev v vrsto RR:



Model za sebično procesiranje (nad.)

- Na osnovi slike sledi enačba:

$$y = \frac{b}{\lambda_p} = \left(\frac{1}{\lambda_p} - \frac{1}{\lambda} \right) a$$

- Notranja intenzivnost in faktor uporabnosti sta:

$$\lambda_p = \lambda \left(1 - \frac{b}{a} \right)$$

$$\rho_p = \lambda_p \overline{x}$$

N. Zimic 7-39

Model za sebično procesiranje (nad.)

- Na osnovi Laplaceove transformacije sledi enačba časa zadrževanja zahteve v sistemu:

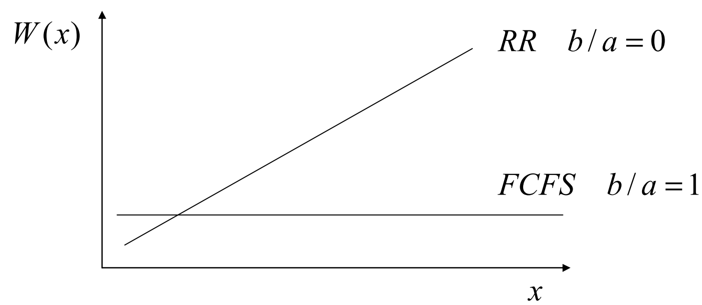
$$T(x) = \frac{b/a}{1-\rho_p} T_{FCFS}(x) + \left(1 - \frac{b/a}{1-\rho_p} \right) T_{RR}(x)$$

- V primeru 0<*a*=*b* je to čisti FCFS sistem, v primeru ko je *b*=0 je to čisti RR sistem.

N. Zimic 7-40

Model za sebično procesiranje (nad.)

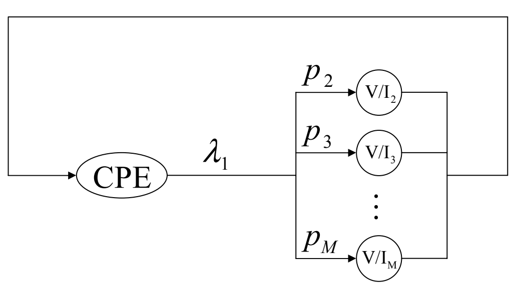
- Graf zadrževanja zahteve v čakalni vrsti $W(x)$ v odvisnosti od časa strežbe x:



N. Zimic 7-41

Model multiprogramiranja

- Model multiprogramiranja sestavlja centralna procesna enota in vhodno-izhodne enote. V sistemu se nahaja M enot (vključno z CPE) in K programov (zahtev).



N. Zimic 7-42

Model multiprogramiranja (nad.)

- Na osnovi Littleovega pravila je intenzivnost prihajanja zahtev v odvisnosti od števila zahtev v sistemu *i*:

$$\lambda_1(i) = \frac{i}{T_1(i) + \sum_{j=2}^{M} p_j T_j(i)}$$

- Intenzivnost prihajanja zahtev v posamezno vhodno-izhodno enoto v odvisnosti od števila zahtev v sistemu *i* je:

$$\lambda_j(i) = p_j \lambda_1(i), \quad j = 2,3,\ldots,M$$

Model multiprogramiranja (nad.)

- Čas zadrževanja prihajajoče zahteve v opazovani strežni enoti *j* pri *i* zahtevah v sistemu je:

$$T_j(i) = \bar{x}_j[1 + \bar{N}_j(i-1)], \quad j = 1,2,\ldots,M$$

- Povprečno število zahtev v strežni enoti je:

$$\bar{N}_j(i) = \lambda_j(i) T_j(i), \quad j = 1,2,\ldots,M$$

- Povprečno število zahtev v strežni enoti pri praznem sistemu je 0:

$$\bar{N}_j(0) = 0, \quad j = 1,2,\ldots,M$$

Model multiprogramiranja (nad.)

- Faktor uporabnosti *j*-te strežne enote je:

$$\rho_j(i) = \lambda_j(i)\overline{x}_j, \quad j = 1,2,\ldots,M$$

- Računanje se prične s praznim sistemom (i=0) ter rekurzivno nadaljuje do števila zahtev v sistemu K.
- Celoten čas cikla posamezne zahteve v sistemu z M strežnimi enotami in K zahtevami je:

$$T = \frac{K}{\lambda_1} = T_1 + \sum_{j=2}^{M} p_j T_j$$

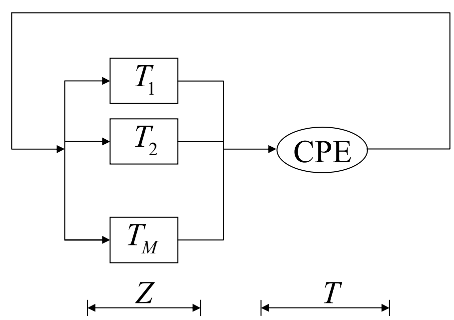
Primer modela multiprogramiranja

- Sistem je sestavljen iz CPE s povprečnim časom strežbe 3ms in tremi vhodno-izhodnimi enotami s povprečnimi časi strežbe: 12ms, 8ms in 21ms. Verjetnost obiskovanja vhodno-izhodnih naprav je: 0.3, 0.6 in 0.1. Kakšen je cikel zahteve, če je v sistemu 5 zahtev.
  - sistem se rešuje rekurzivno,
  - začetni pogoj je nič zahtev v sistemu,
- Čas cikla zahteve v odvisnosti od števila zahtev v sistemu:

Št. zahtev	0	1	2	3	4	5
Čas cikla (ms)	0	13,50	17,16	20,93	24,80	28,78

Model za interaktivno procesiranje

- Model za interaktivno procesiranje predstavlja strežna enota in M terminalov. Posebnost modela je čas razmišljanja na terminalih Z.



Model za interaktivno procesiranje (nad.)

- Po Littlovem pravilu velja:

$$Z + T = \frac{M}{R}$$

- Iz gornje enačbe sledi čas zadrževanja zahteve v strežni enoti:

$$T = \frac{M}{R} - Z$$

- Propustnost je:

$$R = \mu(1 - P_0)$$

Model za interaktivno procesiranje (nad.)

- Propustnost R je v nenasičenju:

$$R = \mu(1 - P_0) = \mu\rho = \lambda$$

- Propustnost R je v nasičenju enaka intenzivnosti strežbe:

$$R = \mu(1 - P_0) = \mu$$

- Idealni čas zadrževanja zahteve v strežni enoti (brez čakalne vrste) je enak času strežbe. Idealiziran celoten čas zadrževanja v sistemu je:

$$T = \max\left(\bar{x}, \frac{M}{\mu} - Z\right)$$

Model za interaktivno procesiranje (nad.)

- Število terminalov M', pri katerem sistem preide v nasičenje, je v točki, kjer se oba dela prejšnje enačbe izenačita:

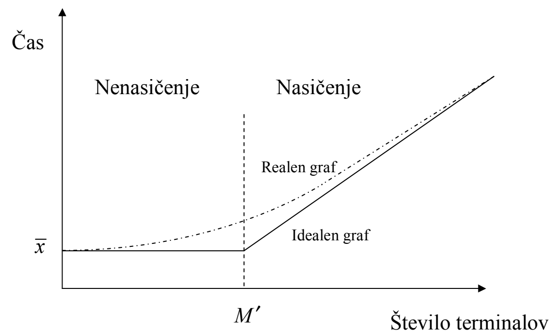
$$\bar{x} = \frac{M'}{\mu} - Z$$

- Iz česar sledi število terminalov v točki nasičenja:

$$M' = \frac{\bar{x} + Z}{\bar{x}}$$

Model za interaktivno procesiranje (nad.)

- Graf časa zadrževanja zahteve v sistemu v odvisnosti od števila terminalov:



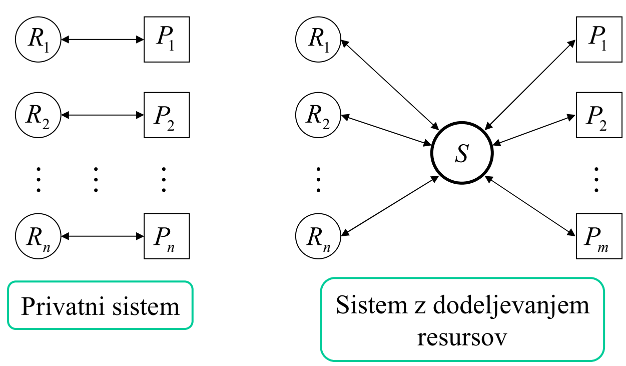
N. Zimic 7-51

Povezovalniki resursov

N. Zimic

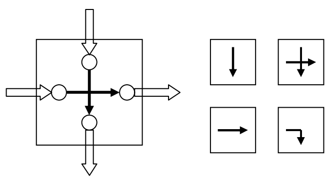
Povezovalniki resursov

- Naloga povezovalnikov je povezovanje resursov med seboj. Običajno povezujejo procesne enote s skupnimi moduli.

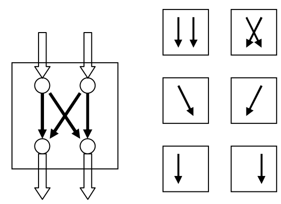


Povezovalniki resursov (nad.)

- Tipi povezovalnikov so:
  - sistem vodil,
  - križni povezovalniki,
  - delta povezovalniki.



Križni povezovalnik



Delta povezovalnik

Povezovalniki resursov (nad.)

- Najpomembnejši performančni indeks povezovalnikov je pasovna širina (BW), ki je povprečno število modulov, ki so lahko aktivni v času enega cikla. Uporabnost procesorjev je:

$$U = \frac{BW}{m\lambda T}$$

  - BW: pasovna širina,
  - m: število procesorjev,
  - λ: intenzivnost prihajanja zahtev,
  - T: čas cikla prenosa med procesorjem in modulom.

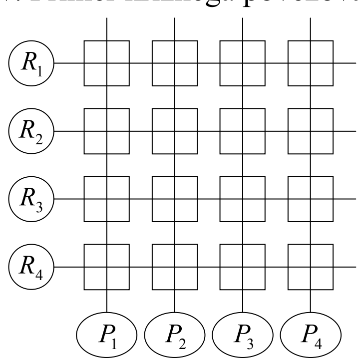
Povezovalniki resursov (nad.)

- Povprečno število podatkov, ki jih je povezovalnik sposoben prenesti v časovni enoti, imenujemo propustnost:

$$R = U\lambda = \frac{BW}{mT}$$

Križni povezovalniki

- Število potrebnih elementov pri križnih povezovalnikih je reda $O(n*m)$, kjer je m število procesorjev in n število modulov. Primer križnega povezovalnika:



Križni povezovalniki (nad.)

- Pasovna širina za križni povezovalnik je:

$$BW = n\left(1-\left(1-\frac{p}{n}\right)^m\right)$$

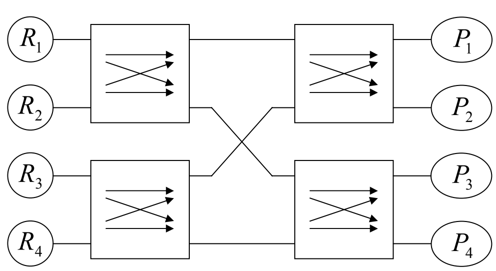
$\left(1-\frac{p}{n}\right)^m$ Noben povezovalnik ne zaseda vodila

$1-\left(1-\frac{p}{n}\right)^m$ Vsaj en povezovalnik zaseda vodilo

N. Zimic 8-7

Delta povezovalniki

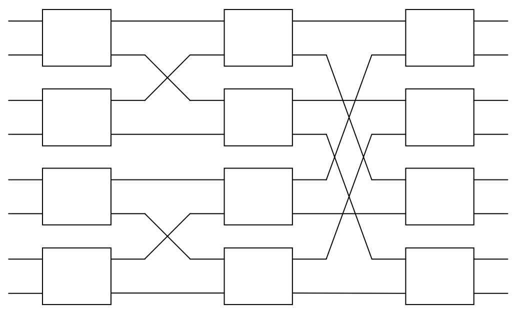
- Število potrebnih elementov pri stopenjskih (delta) povezovalnikih je reda $O(n*\log_2(m))$, kjer je m število procesorjev in n število modulov. Primer delta povezovalnika:



N. Zimic 8-8

Delta povezovalniki (nad.)

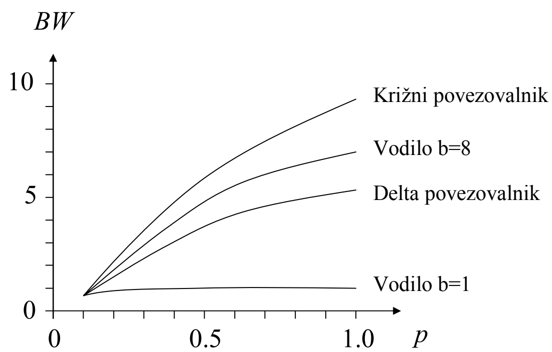
- Primer vezave delta povezovalnikov za 8 procesorjev in 8 skupnih modulov:



N. Zimic 8-9

Primerjava povezovalnikov

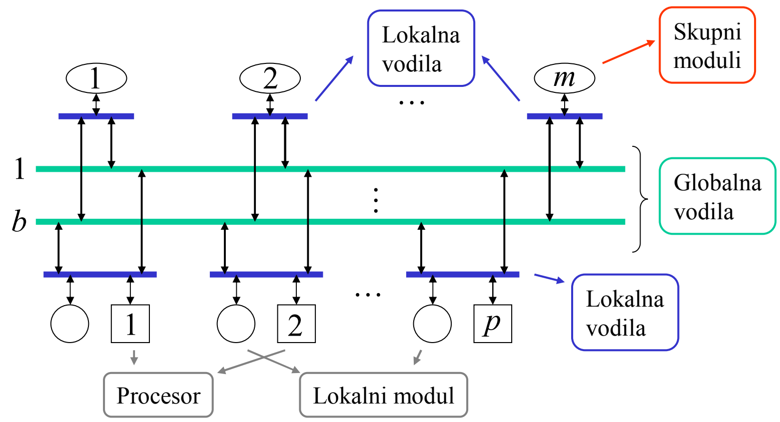
- Graf prikazuje pasovno širino povezovalnikov v odvisnosti od verjetnosti zahtev *p* po skupnem modulu:



N. Zimic 8-10

Markovski model za sistem vodil

- Slika računalniškega sistema s sistemom vodil:



N. Zimic

8-11

Markovski model za sistem vodil (nad.)

- Markovski model za sistem vodil ima tri stanja:
  - procesor procesira v okviru istega modula,
  - procesor dostopa (bere ali piše) do skupnega modula,
  - procesor čaka na prost resurs (prost modul ali prosto vodilo).
- Za postavitev Markovske verige predpostavimo:
  - procesorji večino opravil opravijo v okviru lokalnih vodil,
  - občasno berejo ali pišejo v enega od skupnih modulov,
  - čas dostopa do skupnega vodila je slučajna spremenljivka z eksponentno verjetnostno porazdelitvijo in z intenzivnostjo μ_j, za j-ti modul.

N. Zimic

8-12

Markovski model za sistem vodil (nad.)

- Za postavitev Markovske verige predpostavimo (nad.):
  - če sta pot do zahtevanega resursa in resurs prosta, se zasedeta v hipu,
  - če pot ali resurs nista prosta, procesor čaka na sprostitev,
  - vodilo in resurs se sprostita v hipu brez zakasnitve,
  - intenzivnost povpraševanja po skupnih λ_i resursih je slučajna spremenljivka z eksponentno verjetnostno porazdelitvijo za *i*-ti procesor,
  - verjetnost zahteve *i*-tega procesorja po *j*-tem modulu je p_{ij}, kjer velja:

$$\lambda_{ij} = \lambda_i p_{ij}$$

Markovski model za sistem vodil (nad.)

- Ker število stanj Markovske verige zelo hitro narašča, predpostavimo:
  - vsi procesorji imajo enako intenzivnost dostopanja do skupnih vodil λ,
  - vsi skupni resursi imajo enako intenzivnost strežbe μ,
  - verjetnosti dostopanja do posameznega modula so enake.
- Tako velja:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_p = \lambda$$
$$\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_m = \mu$$
$$p_{ij} = 1/m, \quad i = 1,2,\ldots,m; \quad j = 1,2,\ldots,p$$
$$\lambda_{ij} = \lambda/m, \quad i = 1,2,\ldots,m; \quad j = 1,2,\ldots,p$$

Markovski model za sistem vodil (nad.)

- Markovska veriga za sistem vodil je opredeljena s p pari točk:

  $F = \{(m_1, s_1), (m_2, s_2), \ldots, (m_p, s_p)\}$
- Kjer je m_i stanje procesiranja:

$$m_i = \begin{cases} 0, & \text{procesiranje nad lokalnim modulom} \\ k, & \text{procesiranje nad } k\text{-tim skupnim modulom} \end{cases}$$

- In s_i stanje procesorja:

$$s_i = \begin{cases} 0, & \text{procesor je aktiven nad lokalnim modulom} \\ j, & \text{procesor je } j\text{-ti v vrsti za skupni modul } m_i \\ -1, & \text{procesor zaseda modul } m_i \end{cases}$$

Markovska veriga s skupnimi stanji

- Markovska veriga je opredeljena z množico stanj:

  $\boldsymbol{F} = \{F_1, F_2, \ldots, F_k\}$
- Verjetnosti prehodov med stanji Markovske verige določa matrika M:

$$M = \left[p_{ij}\right], \quad i = 1, 2, \ldots, k; \quad j = 1, 2, \ldots, k$$

- Naj bo $\boldsymbol{A}$ particija množice $\boldsymbol{F}$:

$$\boldsymbol{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_t\}, \quad t \le k$$

Markovska veriga s skupnimi stanji (nad.)

- Verjetnost prehodov q_{mn} med blokoma A_m in A_n iz particije ***A*** je:

$$q_{mn} = \sum_{F_i \in A_m,\, F_j \in A_n} p_{ij} / n(A_m)$$

- Kjer je $n(A_m)$ število elementov v bloku A_m.

N. Zimic 8-17

Primer Markovskega modela s skupnimi stanji

- Računalniški sistem sestavljajo trije procesorji, trije skupni moduli in dve vodili.

$$p = 3, \quad m = 3, \quad b = 2$$

- Stanje Markovske verige je opredeljeno kot:

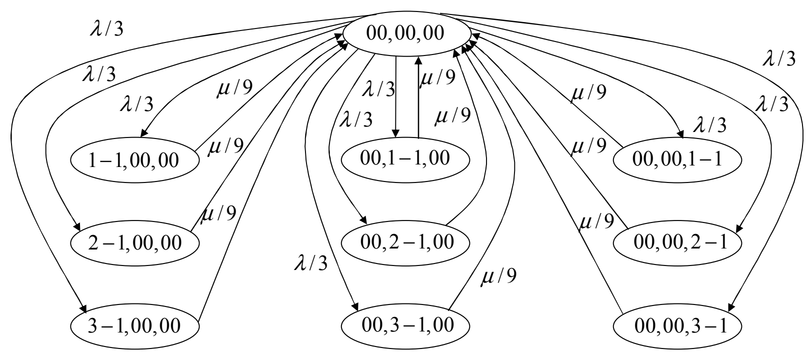
$$(m_1, s_1; m_2, s_2; m_3, s_3)$$

- Kjer je m_i stanje procesiranja in s_i stanje procesorja.

N. Zimic 8-18

Primer Markovskega modela s skupnimi stanji (nad.)

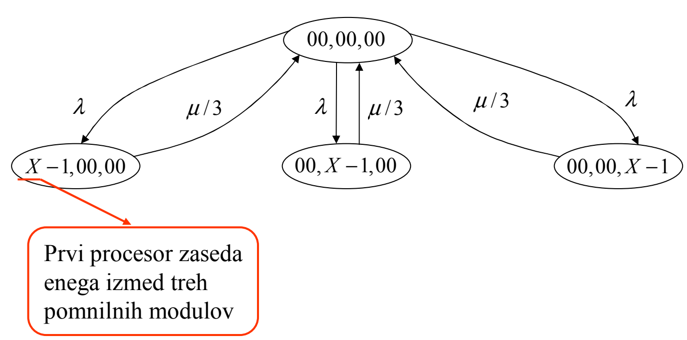
- Slika dela Markovske verige za prejšnji primer:



N. Zimic 8-19

Primer Markovskega modela s skupnimi stanji (nad.)

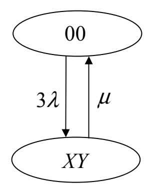
- Z združevanjem stanj, ki opisujejo stanje procesorja, se število stanj zmanjša:



N. Zimic 8-20

Primer Markovskega modela s skupnimi stanji (nad.)

- Z združevanjem stanj, ki opisujejo stanje procesiranja, se število stanj še dodatno zmanjša:



- Stanje *XY* je skupno stanje, ki je rezultat združevanja zasedenosti enega modula.

Markovski model za sistem vodil

- Markovski model za sistem vodil se lahko definira na več različnih načinov. V podanem primeru je število zahtev za vsak skupen resurs in za vsako vodilo:

$$(n_m, q_{m_1}, q_{m_2}, \ldots, q_{m_m}, q_{b_1}, q_{b_2}, \ldots, q_{b_b})$$

- Ker je omenjena delitev preveč kompleksna, se zapis poenostavi:

$$(n_m, q_m, q_b)$$

  - n_m je število procesorjev, ki zasedajo skupne module,
  - q_m je število zahtev, ki čakajo na skupni modul,
  - q_b je število zahtev, ki čakajo na prosto vodilo.

Primer Markovskega modela za sistem vodil

- Podan je sistem s tremi procesorji, tremi skupnimi moduli in dvema vodiloma (3*3*2).
- Stanje (000): noben procesor ne zaseda skupnih modulov, nobena zahteva ne čaka v vrsti za skupni modul in nobena zahteva ne čaka na prosto vodilo.
- Intenzivnosti prihajanja zahtev s strani enega procesorja, ko so vsi ostali prosti:

$$\lambda_{11} = \lambda/3 \quad \lambda_{21} = \lambda/3 \quad \lambda_{31} = \lambda/3$$
$$\lambda_{12} = \lambda/3 \quad \lambda_{22} = \lambda/3 \quad \lambda_{32} = \lambda/3$$
$$\lambda_{13} = \lambda/3 \quad \lambda_{23} = \lambda/3 \quad \lambda_{33} = \lambda/3$$

N. Zimic 8-23

Primer Markovskega modela za sistem vodil (nad.)

- Intenzivnost prihajanja zahtev, ko se spremeni stanje iz 000 → 100 (zahtevo pošlje en procesor), je vsota vseh posameznih intenzivnosti s prejšnje enačbe:
  $$\lambda_{000\rightarrow 100} = 3\lambda$$
- Intenzivnost spreminjanja stanj iz 100 → 200 obsega stanja (zaseden je prvi procesor):

$$\lambda_{22} = \lambda/3 \quad \lambda_{32} = \lambda/3$$
$$\lambda_{23} = \lambda/3 \quad \lambda_{33} = \lambda/3$$

$$\lambda_{100\rightarrow 200} = 4\lambda/3$$

N. Zimic 8-24

Primer Markovskega modela za sistem vodil (nad.)

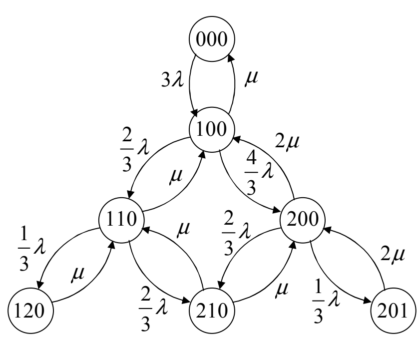
- Intenzivnost spreminjanja stanj iz 200 → 201 obsega stanja (zaseden je prvi in drugi procesor):

$$\lambda_{33} = \lambda / 3$$

$$\lambda_{200 \to 300} = \lambda / 3$$

Primer Markovskega modela za sistem vodil (nad.)

- Graf Markovske verige za model s tremi procesorji, tremi skupnimi moduli in dvema vodiloma:



Poenostavljen Markovski model za sistem vodil

- Zaradi velikega števila stanj v Markovski verigi je smiselno stanja še dodatno združiti. Seveda je pri združevanju potrebno paziti, da so rezultati še vedno uporabni. Stanje Markovske verige v poenostavljenem modelu je:

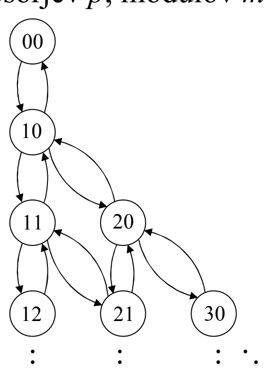
$$(n_m, q)$$

  – n_m je število procesorjev, ki zasedajo skupne module,
  – q je število zahtev, ki čakajo na skupni modul ali na prosto vodilo.

N. Zimic 8-27

Poenostavljen Markovski model za sistem vodil (nad.)

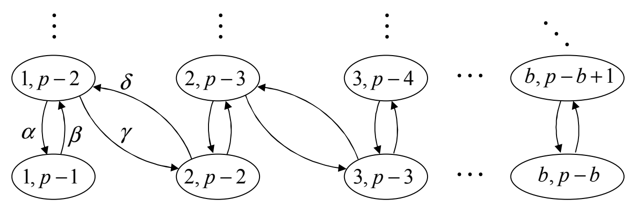
- Graf Markovske verige za model s poljubnim številom procesorjev p, modulov m in vodil b:



N. Zimic 8-28

Poenostavljen Markovski model za sistem vodil (nad.)

- Nadaljevanje grafa s prejšnje strani:



  - p: število vseh procsorjev,
  - b: število vodil.
- Število vseh stanj verige je:

  $N = 1 + b[p + 1/2 * (1-b)]$

Poenostavljen Markovski model za sistem vodil (nad.)

- Smiselen pogoj za sistem vodil je:

  $b \le p \le m$
- Stanja Markovskga modela pri zgornjem pogoju so (i,j), kjer velja:

  $0 \le i \le b; \quad 0 \le j \le p-b$
- Možni prehodi med stanji so:

  $\alpha: \quad j \rightarrow j+1$

  $\beta: \quad j \rightarrow j-1$

  $\gamma: \quad i \rightarrow i+1$

  $\delta: \quad i \rightarrow i-1$

Poenostavljen Markovski model za sistem vodil (nad.)

- Intenzivnost prehodov je:

$$\lambda(\alpha) = (p - i - j)\lambda \frac{m - i}{m}, \quad 0 \le i \le b, \quad p - i - j > 0$$

$$\mu(b) = i\mu \left(\frac{i-1}{i} \right)^j, \quad i \le b$$

$$\lambda(\gamma) = \begin{cases} (p - i - j)\frac{1}{m}\lambda & i > b, \quad p - i - j > 0 \\ (p - i - j)\lambda & i = b, \quad p - i - j > 0 \end{cases}$$

$$\mu(\delta) = i\mu - \mu(\beta)$$

N. Zimic 8-31

Poenostavljen Markovski model za sistem vodil (nad.)

- Primer za tri procesorje, tri skupne module in dve vodili (p=3, m=3, b=2):

$$\lambda_{00 \to 10} = (3 - 0 - 0)\lambda \frac{3 - 0}{2} = 3\lambda, \qquad (\alpha)$$

$$\lambda_{10 \to 11} = (3 - 1 - 0)\frac{1}{3}\lambda = \frac{2}{3}\lambda, \qquad (\gamma)$$

$$\lambda_{11 \to 12} = (3 - 1 - 1)\frac{1}{3}\lambda = \frac{1}{3}\lambda, \qquad (\gamma)$$

$$\lambda_{10 \to 20} = (3 - 1 - 0)\frac{3 - 1}{3}\lambda = \frac{4}{3}\lambda, \qquad (\lambda)$$

$$\lambda_{20 \to 21} = (3 - 2 - 0)\lambda = \lambda, \qquad (\gamma)$$

N. Zimic 8-32

Poenostavljen Markovski model za sistem vodil (nad.)

- Nadaljevanje:

$$\lambda_{11\rightarrow 21} = (3-1-1)\lambda \frac{3-1}{2} = \frac{2}{3}\lambda, \qquad (\alpha)$$

$$\mu_{10\rightarrow 00} = 1\mu \left(\frac{1-1}{3}\right)^0 = \mu, \qquad (\beta)$$

$$\mu_{11\rightarrow 10} = 1\mu - 1\mu \left(\frac{1-1}{3}\right)^1 = \mu, \qquad (\delta)$$

$$\mu_{12\rightarrow 11} = 1\mu - 1\mu \left(\frac{1-1}{3}\right)^1 = \mu, \qquad (\delta)$$

Poenostavljen Markovski model za sistem vodil (nad.)

- Nadaljevanje:

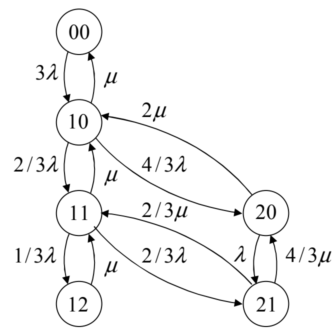
$$\mu_{20\rightarrow 10} = 2\mu \left(\frac{2-1}{3}\right)^0 = 2\mu, \qquad (\beta)$$

$$\mu_{21\rightarrow 11} = 2\mu \left(\frac{2-1}{3}\right)^1 = \frac{2}{3}\mu, \qquad (\beta)$$

$$\mu_{21\rightarrow 20} = 2\mu - 2\mu \left(\frac{2-1}{3}\right)^1 = \frac{4}{3}\mu, \qquad (\delta)$$

Poenostavljen Markovski model za sistem vodil (nad.)

- Markovski graf za podan primer:



$p = 3, \quad m = 3, \quad b = 2$

N. Zimic

8-35

Uvod v simulacijo

N. Zimic

Simulacija

- Simulacija je ena izmed tehnik, ki se uporablja pri določanju zmogljivosti računalniških sistemov.
- Simulacijski model je opredeljen s stanjem sistema, ki ga na primer sestavljajo: število zahtev v čakalni vrsti, zasedenost resursov, intenzivnost strežbe, itd.
- Ko simulacija teče, se stanje sistema spreminja s časom glede na vhodne parametre ter medsebojne odvisnosti.
- Sprememba stanja sistema se imenuje dogodek.
- Pri simulaciji računalniških sistemov se običajno uporablja simulacija na osnovi diskretnih dogodkov.

Vrste simulacije

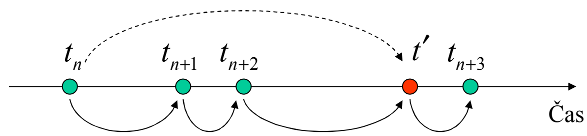
- Simulacije se glede na stanje sistema delijo na diskretne in zvezne:
  - diskretno: število programov v sistemu, število zahtev v čakalni vrsti, ...
  - zvezno: temperatura, obrati motorja, ...
- Simulacija se glede na čas delijo na časovno zvezne in časovno diskretne simulacije:
  - časovno diskretna simulacija: dnevni tečaj delnic,
  - časovno zvezna simulacija: število zahtev v čakalni vrsti.
- V računalništvu se običajno uporablja model z zveznim časom in diskretnimi stanji sistema.

Simulacija na osnovi diskretnih dogodkov

- Dogodek je osnova za spremembo stanja sistema (prihod zahteve v sistem, konec strežbe, ...).
- Ker se med dvema dogodkoma stanje sistema ne spremeni, ni smiselno, da čas teče v majhnih korakih (Δt), ampak se simulacija izvaja samo ob času, ko nastopa dogodek.
- V simulatorju se zgradi časovno urejen seznam bodočih dogodkov. Simulacijska ura se po opravljeni simulaciji dogodka premakne na uro naslednjega dogodka.
- Če je rezultat simulacije nov dogodek, se le ta ustrezno uvrsti v časovno urejen seznam bodočih dogodkov.

Simulacija na osnovi diskretnih dogodkov (nad.)

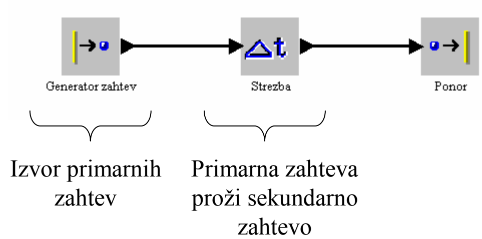
- Primer simulacije dogodkov v primeru, ko je rezultat simulacije nov dogodek:



- Čas se diskretno premika po časovni osi: $t_n \rightarrow t_{n+1} \rightarrow t_{n+2} \rightarrow t' \rightarrow t_{n+3} \ldots$
- V opazovanem primeru je rezultat simulacije v času t_n nov dogodek v času t', ki se ustrezno vrine v časovno urejen seznam dogodkov.

Simulacija na osnovi diskretnih dogodkov (nad.)

- Dogodki se ločijo na primarne in sekundarne:
  - primarni dogodki so rezultat generatorja zahtev,
  - sekundarni dogodki so rezultat izvedbe dogodka.
- Primer simulacije iz simulacijskega paketa SimProcess:



Simulacija na osnovi diskretnih dogodkov (nad.)

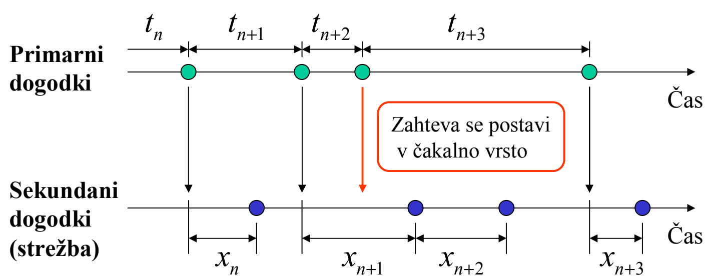
- Pri izvajanju primarnega dogodka se:
  - če so izpolnjeni pogoji za generiranje nove zahteve, izračuna čas novega primarnega dogodka in se le ta vrine v časovno urejen seznam dogodkov,
  - če je strežnik prazen, izračuna čas trajanja sekundarnega dogodka in se ga vrine v časovno urejen seznam dogodkov,
  - če je strežnik zaseden, se poveča število dogodkov v čakalni vrsti za ena.

Simulacija na osnovi diskretnih dogodkov (nad.)

- Pri izvajanju sekundarnega dogodka se:
  - če je izhod opazovane strežne enote povezan na vhod druge strežne enote, lahko sekundarna zahteva sproži novo sekundarno zahtevo (ki se nanaša na nov strežnik) ali poveča število zahtev v ponorni čakalni vrsti,
  - če v opazovani strežni enoti čakalna vrsta ni prazna, se le ta zmanjša za ena in izračuna se čas novega sekundarnega dogodka, ta pa se vrine v časovno urejen seznam zahtev,
  - če je čakalna vrsta prazna, akcija ni potrebna.

Simulacija na osnovi diskretnih dogodkov (nad.)

- Časovni potek simulacije, kjer so t medprihodni časi in x časi strežbe zahtev:



Naključni generatorji

- Naključni generatorji se pri simulaciji uporabljajo za izračun vrednosti vseh spremenljivk, ki so rezultat naključnega procesa.
- Običajno se uporabljajo naključni generatorji, katerih rezultat je naključno število med 0 in 1.
- Naključni generator je realiziran kot rekurzivna funkcija:

$$x_n = f(x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots)$$

- Rezultat ni popoln naključni generator, ampak psevdo naključni generator z določeno periodo.
- Ker ima psevdo naključni generator periodo, je pomembno začetno število, ki se imenuje seme.

Naključni generatorji (nad.)

- Enostaven primer enačbe za naključni generator:

  $x_n = (5 * x_{n-1} + 1) \bmod 16$
- Pri začetnem pogoju (semenu) x_n=1, generator tvori naslednje zaporedje:

  $6,15,12,13,2,11,8,9,14,7,4,5,10,0,1,\underline{6,15,12,13,...}$
- Rezultat deljenja s 15 je psevdo naključno število med 0 in 1.
- Iz primera je razvidno, da je perioda psevdo naključnega generatorja 16.

N. Zimic 9-11

Naključni generatorji (nad.)

- Zahteve, ki jih mora izpolnjevati algoritem za računanje naključnega števila:
  - perioda mora biti ustrezno velika,
  - vrednosti morajo biti statistično neodvisne,
  - verjetnost mora biti enakomerno porazdeljena,
  - algoritem mora biti učinkovit pri računanju naslednjega števila.
- Enačba za naključni generator, ki so ga uporabljali nekateri starejši računalniški programi:

  $x_n = 7^5 * x_{n-1} \bmod (2^{31} - 1)$

N. Zimic 9-12

Naključni generatorji (nad.)

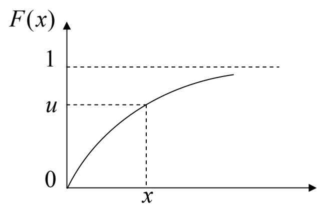
- Pogoste zmote pri naključnih generatorjih:
  - kompleksnost algoritma vodi k naključnosti rezultatov,
  - enostaven test je dovolj za preverjanje naključnosti,
  - vrednosti naključnega generatorja ni mogoče napovedati,
  - nekatera semena so boljša kakor druga,
  - natančnost pri realizaciji ni pomembna.

Generiranje različnih verjetnostih porazdelitev

- Simulacijo tvorijo različni gradniki (generatorji, strežniki, ...), katerih čas je rezultat naključnega procesa. Naključni proces je običajno podan s povprečnim časom in verjetnostno porazdelitvijo.
- Za simulacijo so potrebni naključni generatorji, ki generirajo naključna števila po različnih verjetnostnih porazdelitvah.
- Rezultat porazdelitvene funkcije $u=F(x)$ je enakomerno porazdeljen med 0 in 1.

Generiranje različnih verjetnostih porazdelitev (nad.)

- Primer porazdelitvene funkcije:



- Iz vrednosti u se preko inverzne porazdelitvene funkcije izračuna vrednost x:

$$x = F^{-1}(u)$$

Primer zvezne verjetnostne porazdelitve

- V računalniškem omrežju so paketi treh velikosti, in sicer 70% paketov je dolžine 64 zlogov, 10% paketov je dolžine 128 zlogov in 20% paketov je dolžine 512 zlogov.
- Verjetnostna porazdelitvena funkcija je:

$$F(x) = \begin{cases} 0.0 & 0 \le x < 64 \\ 0.7 & 64 \le x < 128 \\ 0.8 & 128 \le x < 512 \\ 1.0 & 512 \le x \end{cases}$$

Primer diskretne verjetnostne porazdelitve (nad.)

- Inverzna porazdelitvena funkcija je:

$$F^{-1}(u) = \begin{cases} 64 & 0 \le u \le 0.7 \\ 128 & 0.7 < u \le 0.8 \\ 512 & 0.8 < u \le 1 \end{cases}$$

- Naključna števila po podani porazdelitvi se računajo:
  - izračuna se naključno število s pomočjo naključnega generatorja, ki ima enakomerno verjetnostno porazdelitev,
  - preko inverzne porazdelitvene funkcije se izračuna naključno število.

N. Zimic 9-17

Primer zvezne verjetnostne porazdelitve

- Gostota verjetnosti za eksponentno verjetnostno porazdelitev je:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

- Porazdelitvena funkcija je:

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} = u$$

- Inverzna porazdelitvena funkcija je:

$$x = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-u)$$

N. Zimic 9-18

Primer zvezne verjetnostne porazdelitve (nad.)

- Graf inverzne porazdelitvene funkcije pri λ=1: