Markovske verige

N. Zimic

Stohastični proces

- Stohastični proces je definiran nad množico naključnih spremenljivk $\{X_t : t \in T\}$, kjer je vsaka naključna spremenljivka X_t, indeksirana s parametrom $t \in T$.
- Parameter $t \in T$ se običajno poimenuje tudi časovni parameter, če je $T \subseteq \mathbb{R}_+ = [0,\infty)$.
- Množica vseh naključnih spremenljivk $X(t)$ (za vsak $t \in T$) se imenuje prostor stanj stohastičnega procesa.
- Takšen proces imenujemo časovno zvezni stohastični proces.

Stohastični proces (nad.)

- Če je stohastični proces definiran nad množico naključnih spremenljivk $\{X_n : n \in \mathbb{N}_0\}$, kjer je vsaka naključna spremenljivka X_n, indeksirana s parametrom n, potem takšen proces imenujemo časovno diskreten stohastični proces.

N. Zimic 2-3

Stohastični proces (nad.)

- Stohastični proces se lahko opiše s porazdelitveno funkcijo $F_X(\boldsymbol{s};\boldsymbol{t})$ za podan nabor naključnih spremenljivk $\{X(t_1), X(t_2), ..., X(t_n)\}$, pri čemer je vektor $\boldsymbol{t} = (t_1, t_2, ..., t_n) \in \mathbb{R}$ in $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, ..., s_n) \in \mathbb{R}^n$ prostor stanj, kjer je $t_1 < t_2 < ... < t_n$:

$$F_X(\boldsymbol{s};\boldsymbol{t}) = P[X(t_1) \le s_1, X(t_2) \le s_2, ..., X(t_n) \le s_n]$$

- Gostota verjetnosti je v tem primeru:

$$f_X(\boldsymbol{s};\boldsymbol{t}) = \frac{\partial^n F_X(\boldsymbol{s};\boldsymbol{t})}{\partial s_1 \partial s_2 ... \partial s_n}$$

N. Zimic 2-4

Markovski proces

- Stohastični proces $\{X_t : t \in T\}$ je Markovski proces, če je za vse $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n < t_{n+1}$ in $s_i \in S$ pogojna porazdelitvena funkcija $X_{t_{n+1}}$ spremenljivk odvisna samo od predzadnje spremenljivke $X(t_n)$ in ne od $X(t_0), X(t_1), ..., X(t_{n-1})$:

$$P[X(t_{n+1}) \le s_{n+1} \mid X(t_n) = s_n, X(t_{n-1}) = s_{n-1}, ..., X(t_0) = s_0] =$$
$$= P[X(t_{n+1}) \le s_{n+1} \mid X(t_n) = s_n]$$

- To pomeni, da je Markovski proces stohastični proces brez pomnjenja.

Časovna homogenost

- Markovski proces je časovno homogen, če verjetnostna porazdelitev naključne spremenljivke $X(t_{n+1})$ ni odvisna od trenutnega opazovanega časa. Če je naključna spremenljivka invariantna za $t(n)$, je potem tudi časovno homogena.

$$P[X(t_{n+1}) \le s_{n+1} \mid X(t_n) = s_n] = P[X(t_{n+1-t_n}) \le s_{n+1} \mid X(t_0) = s_n]$$

Časovno diskretni Markovski proces

- Diskretni Markovski proces je definiran nad diskretnim končnim ali števno neskončnim prostorom stanj *S*.
- Časovno diskretni Markovski proces je definiran nad diskretnim prostorom *T*, kjer je $T \subseteq \mathbb{N}_o$.

Časovno diskretni Markovski proces (nad.)

- Za podan stohastični proces $\{X_0, X_1, ..., X_{n+1}, ...\}$, za opazovane točke *0,1,...,n+1*, prestavlja diskretni Markovski proces, kjer za vse $n \in \mathbb{N}_0$ in $s_i \in S$ velja:

$$P[X_{n+1} = s_{n+1} \mid X_n = s_n, X_{n-1} = s_{n-1}, ..., X_0 = s_0] =$$
$$= P[X_{n+1} = s_{n+1} \mid X_n = s_n]$$

- To pomeni, da je diskretni Markovski proces stohastični proces brez pomenjenja.

Prehajanja v Markovski verigi

- Privzemimo, da so stanja Markovske verige $S = \{0, 1, 2, ...\}$. Verjetnost prehoda med stanjem s_n in stanjem s_{n+1} lahko zapišemo kot pogojno verjetnost:

$$p_{ij}^{(1)}(n) = P[X_{n+1} = s_{n+1} = j \mid X_n = s_n = i]$$

- Indeksa i in j pomenita prehod med stanji i in j. Eksponent (1) predstavlja en korak (v času n in $n+1$), parameter (n) pa pomeni časovni korak n.

N. Zimic 2-9

Prehajanja v časovno homogeni Markovski verigi

- Za časovno homogeno Markovsko verigo velja, da je neodvisna od trenutnega časa. Tako lahko verjetnost prehoda med stanjema i in j zapišemo:

$$p_{ij}^{(1)} = p_{ij}^{(1)}(n) = P[X_{n+1} = j \mid X_n = i] = P[X_1 = j \mid X_0 = i]$$

$$\forall n \in T$$

- Zaradi lažjega zapisa bomo eksponent za samo en korak izpuščali:

$$p_{ij} = p_{ij}^{(1)}$$

N. Zimic 2-10

Matrični zapis

- Verjetnost prehoda v enem koraku med stanji lahko zapišemo tudi v matrični obliki:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}^{(1)} = [p_{ij}] = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \vdots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \vdots \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots \end{bmatrix}$$

- Vsota verjetnosti v vrstici je enaka 1:

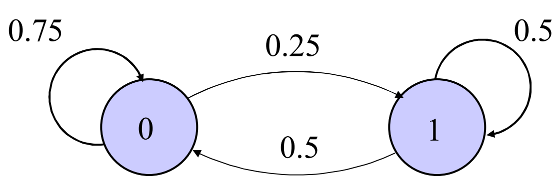
$$\sum_{j \in S} p_{ij} = 1, \qquad 0 \le p_{ij} \le 1$$

N. Zimic 2-11

Primer Markovske verige

- Markovska veriga z dvema stanjema je podana z matriko ter sliko:

$$\mathbf{P}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$



N. Zimic 2-12

Verjetnost prehoda po *n* korakih

- Verjetnost prehoda iz stanja i v času k v stanje j v času l, kjer je med k in l n časovnih korakov, je:

$$p_{ij}^{(n)}(k,l) = P[X_l = j \mid X_k = i], \qquad 0 \le k \le l$$

- Vsota vseh verjetnosti prehodov, ki zapuščajo stanje i, je:

$$\sum_{j \in S} p_{ij}^{(n)}(k,l) = 1, \qquad 0 \le p_{ij}^{(n)}(k,l) \le 1$$

Chapman-Kolmogorov teorem

- Verjetnost prehoda med stanjema i in j v časovno nehomogeni Markovski verigi, je podana z enačbo:

$$p_{ij}^{(n)}(k,l) = \sum_{h \in S} p_{ih}^{(m-k)}(k,m) p_{hj}^{(l-m)}(m,l), \qquad 0 \le k < m < l$$

- Spremenljivka k predstavlja začetni in l končni čas, oziroma korak v Markovski verigi. Vseh korakov je n:

$$n = l - k$$

Chapman-Kolmogorov teorem (nad.)

- Verjetnost prehoda med stanjema *i* in *j* v časovno homogeni Markovski verigi se poenostavi:

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{h \in S} p_{ih}^{(m)} p_{hj}^{(n-m)}, \qquad 0 < m < n$$

- V primeru *m* = 1 iz zgornje enačbe sledi:

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{h \in S} p_{ih}^{(1)} p_{hj}^{(n-1)}$$

- Zapis z matrikami:

$$\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^{(1)}\mathbf{P}^{(n-1)} = \mathbf{P}\mathbf{P}^{(n-1)}$$

Vektor stanj Markovske verige

- Verjetnost, da je Markovska veriga v koraku *n* v stanju *i,* lahko zapišemo:

$$\nu_i(n) = P[X_n = i]$$

- Na osnovi prej zapisane verjetnosti lahko zapišemo vektor stanj Markovske verige:

$$\boldsymbol{\nu}(n) = (\nu_0(n), \nu_1(n), \nu_2(n), \ldots)$$

- Za vektor verjetnosti velja:

$$\sum_{i \in S} \nu_i = 1$$

Vektor stanj Markovske verige (nad.)

- Vektor stanj Markovske verige v časovnem koraku *n* lahko zapišemo:

$$\boldsymbol{\nu}(n) = \boldsymbol{\nu}(0)\mathbf{P}^{(n)} = \boldsymbol{\nu}(n-1)\mathbf{P}$$

- Na osnovi prej zapisane verjetnosti lahko zapišemo vektor stanj Markovske verige:

$$\boldsymbol{\nu}(n) = (\nu_0(n), \nu_1(n), \nu_2(n), \ldots)$$

Stacionarno stanje Markovske verige

- Stacionarno stanje Markovske verige je opredeljeno kot:

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{\nu}(n) = \tilde{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu}(n-1)\mathbf{P} = \tilde{\boldsymbol{\nu}}\,\mathbf{P}$$

- Ko je doseženo stacionarno stanje, se verjetnost posameznega stanja ne spreminja več.

Stacionarno stanje Markovske verige (nad.)

- Stacionarno stanje Markovske verige lahko zapišemo kot:

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{v}(n) = \tilde{\boldsymbol{v}} = \lim_{n\to\infty}(\boldsymbol{v}(0)\mathbf{P}^n) = \boldsymbol{v}(0)\tilde{\mathbf{P}}$$

- Lastnost matrike prehajanja stanj za neskončno korakov je:

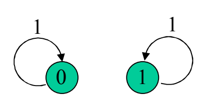
$$\tilde{\mathbf{P}} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n = \begin{bmatrix} \tilde{v}_0 & \tilde{v}_1 & \tilde{v}_2 & \vdots \\ \tilde{v}_0 & \tilde{v}_1 & \tilde{v}_2 & \vdots \\ \tilde{v}_0 & \tilde{v}_1 & \tilde{v}_2 & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots \end{bmatrix}$$

- Izračun stacionarnega stanja ni vedno možen!

Stacionarno stanje - primeri

- Primer Markovske verige, kjer enoličen izračun stacionarnega stanja ni možen:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



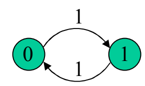
- Matrika prehodov v neskončnosti je kar enaka osnovni matriki. Enolično stacionarno stanje ne obstaja in je kar enako začetnemu vektorju.

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n = \tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \tilde{v} = v(0)\tilde{\mathbf{P}} = v(0)$$

Stacionarno stanje – primeri (nad.)

- Primer Markovske verige, kjer enoličen izračun stacionarnega stanja ni možen:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

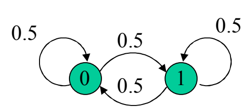


- Matrika prehodov $\mathbf{P}^{(n)}$, ko gre n proti neskončno, ne konvergira.

Stacionarno stanje – primeri (nad.)

- Primer Markovske verige, kjer je izračun stacionarnega stanja možen:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$



- Matrika prehodov $\mathbf{P}^{(n)}$, ko gre n proti neskončno, konvergira in stacionarno stanje obstaja:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P^{(n)}} = \tilde{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \qquad \tilde{v} = v(0)\tilde{\mathbf{P}} = [0.5, 0.5]$$

Verjetnost povratka

- Pogojna verjetnost, da Markovska veriga začne v stanju *i* po *n*>1 korakih prvič doseže stanje *j,* je:

$$f_{ij}^{(n)} = P[X_0 = i, X_1 \neq j, ..., X_{n-1} \neq j, X_n = j]$$

- Pogojna verjetnost, da Markovska veriga začne v stanju *i* in po *n* >1 korakih prvič doseže stanje *i,* je:

$$f_{ii}^{(n)} = P[X_0 = i, X_1 \neq i, ..., X_{n-1} \neq i, X_n = i]$$

N. Zimic 2-23

Verjetnost povratka (nad.)

- Pogojna verjetnost, da se Markovska veriga v isto stanje vrne v poljubnem številu korakov, je:

$$f_{ii} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)}$$

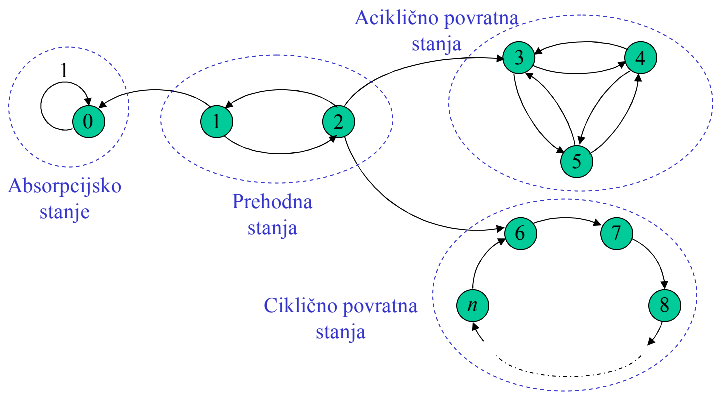
- Povprečno število korakov za vrnitev v isto stanje:

$$m_i = \sum_{n=1}^{\infty} n\, f_{ii}^{(n)}$$

N. Zimic 2-24

Opredelitev stanj

- Stanja Markovske verige so lahko: absorpcijska, prehodna, ciklično povratna in neciklično povratna.



Opredelitev stanj (nad.)

- Absorpcijsko stanje je stanje, katerega verjetnost povratka v enem koraku je 1. Ko sistem pride v to stanje, iz njega ne more več.
- Prehodno stanje je stanje, za katerega obstaja pozitivna verjetnost, da se vanj sistem nikoli več ne vrne. Velja tudi, da je verjetnost povratka manjša od 1:

$$f_{ii} < 1$$

Opredelitev stanj (nad.)

- Aciklično povratna stanja so stanja, kjer je verjetnost vrnitve $f_{ii} = 1$ in število korakov do vrnitve ni točno določeno.
- Ciklično povratna stanja so stanja, kjer se isto stanje doseže po točno določenem številu korakov. Za sliko na prejšnji prosojnici je cikel $d = n - 5$ korakov. Verjetnost vrnitve je $f_{ii}^{(d)} = 1$, kjer d velikost cikla v časovnih korakih.

Časovno zvezni Markovski proces

- Podan stohastični proces $\{\boldsymbol{X}_t : t \in T\}$, je časovno zvezen Markovski proces, če za $t_i \in \mathbb{R}_0^+$ kjer je $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < t_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$ in so stanja $\forall s_i \in S = \mathbb{N}_0$ ter velja pogojna verjetnost:

$$P[X(t_{n+1}) = s_{n+1} \,|\, X(t_n) = s_n, X(t_{n-1}) = s_{n-1}, \ldots, X(t_0) = s_0] =$$
$$= P[X(t_{n+1}) = s_{n+1} \,|\, X(t_n) = s_n]$$

- To pomeni, da je zvezni Markovski proces stohastični proces brez pomenjenja.

Prehajanja v časovno zvezni Markovski verigi

- Verjetnost prehoda iz stanja i v stanje j v časovnem intervalu $[u,v)$, kjer je $u,v\in T$ in $u<v$, je:

$$p_{ij}(u,v) = P[X(v) = j \,|\, X(u) = i]$$

- Po definiciji je pri $u = v$:

$$p_{ij}(u,u) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

N. Zimic 2-29

Chapman-Kolmogorov teorem

- Verjetnost prehoda med stanjema i in j v časovnem intervalu $[u,v)$ za časovno zvezne Markovske verige je:

$$p_{ij}(u,v) = \sum_{k\in S} p_{ik}(u,w)p_{kj}(w,v), \qquad 0 \le u \le w < v$$

- Verjetnost prehodov lahko zapišemo z matriko:

$$\mathbf{H}(u,v) = [p_{ij}(u,v)]$$

- Chapman-Kolmogorov teorem v matričnem zapisu:

$$\mathbf{H}(u,v) = \mathbf{H}(u,w)\,\mathbf{H}(w,v), \quad 0 \le u \le w < v$$

N. Zimic 2-30

Časovno homogene Markovske verige

- Za časovno zvezne Markovske verige velja, da je verjetnost prehoda odvisna samo od razlike časov $t = u - v$ in ne od absolutnih časov u in v:

$$p_{ij}(t) = p_{ij}(0,t) = P[X(u+t) = j \mid X(u) = i] = P[X(t) = j \mid X(0) = i], \quad \forall u \in T$$

N. Zimic 2-31

Vektor stanj v časovno zveznih Markovskih verigah

- Stanje v časovno zvezni Markovski verigi je:

$$\pi_j(v), \quad j \in S$$

- In vektor stanj:

$$\boldsymbol{\pi}(u) = (\pi_1(u), \pi_2(u), \pi_3(u), \ldots)$$

N. Zimic 2-32

Vektor stanj v časovno zveznih Markovskih verigah (nad.)

- Stanje v časovno zvezni Markovski verigi v času v je:

$$\pi_j(v) = \sum_{i \in S} p_{ij}(u,v)\pi_j(u), \quad \forall u,v \in T \quad (u \le v)$$

- V vektorskem zapisu:

$$\boldsymbol{\pi}(v) = \boldsymbol{\pi}(u)\,\mathbf{P}(u,v), \quad \forall u,v \in T \quad (u \le v)$$

Vektor stanj v časovno zveznih Markovskih verigah (nad.)

- Stanje v časovno homogeni zvezni Markovski verigi v času v je:

$$\pi_j(t) = \sum_{i \in S} p_{ij}(0,t)\pi_j(0) = \sum_{i \in S} p_{ij}(t)\pi_j(0)$$

- V vektorskem zapisu:

$$\boldsymbol{\pi}(t) = \boldsymbol{\pi}(0)\,\mathbf{P}(0,t) = \boldsymbol{\pi}(0)\,\mathbf{P}(t)$$

Infinitezimalni generator

- Za časovno diskretno Markovsko verigo velja:

$$\mathbf{H}(m,n) = \mathbf{H}(m,n-1)\mathbf{P}(n-1)$$

$$\mathbf{H}(m,n) - \mathbf{H}(m,n-1) = \mathbf{H}(m,n-1)\mathbf{P}(n-1) - \mathbf{H}(m,n-1) = \\ = \mathbf{H}(m,n-1)(\mathbf{P}(n-1) - \mathbf{I})$$

- Če obe strani delimo z velikostjo koraka in če korak limitira proti 0 ($\Delta t \to 0$):

$$\mathbf{Q}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{P}(t, t+\Delta t) - \mathbf{I}}{\Delta t}$$

N. Zimic 2-35

Infinitezimalni generator (nad.)

- Odvisnost matrike $\mathbf{H}(s,t)$ po času lahko zapišemo:

$$\frac{\partial \mathbf{H}(s,t)}{\partial t} = \mathbf{H}(s,t)\mathbf{Q}(t), \quad s \le t$$

- Pri čemer se $\mathbf{Q}(t)$ imenuje infinitezimalni generator:

$$\mathbf{Q}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{P}(t, t+\Delta t) - \mathbf{I}}{\Delta t}$$

N. Zimic 2-36

Infinitezimalni generator (nad.)

- Elementi matrike $\mathbf{Q}(t)$ so:

$$q_{ii}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_{ii}(t, t+\Delta t) - 1}{\Delta t}$$

$$q_{ij}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_{ij}(t, t+\Delta t)}{\Delta t}, \quad i \neq j$$

- Če limite obstajajo in velja $\sum_{j \in S} p_{ij}(t, t+\Delta t) = 1$, potem sledi:

$$\sum_{j \in S} q_{ij}(t) = 0, \quad \forall i \in S$$

N. Zimic 2-37

Infinitezimalni generator (nad.)

- Za časovno zvezne Markovske verige velja:

$$q_{ij} = q_{ij}(t), \quad \forall i, j \in S$$

- Sprememba vektorja stanj po času je:

$$\frac{d\pi_j(t)}{dt} = \sum_{i \in S} q_{ij} \pi_i(t), \quad \forall j \in S$$

- V matričnem zapisu:

$$\dot{\boldsymbol{\pi}}(t) = \frac{d\boldsymbol{\pi}(t)}{dt} = \boldsymbol{\pi}(t)\mathbf{Q}$$

N. Zimic 2-38

Infinitezimalni generator (nad.)

- Za časovno homogene Markovske verige velja:

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \frac{d\mathbf{P}(t)}{dt} = \mathbf{P}(t)\,\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\,\mathbf{P}(t)$$

N. Zimic 2-39

Stacionarna stanja

- Za stacionarna stanja velja:
  - Neodvisna od časa *t*
  - Neodvisna od začetnega vektorja $\boldsymbol{\pi}(0)$
  - Strogo pozitivno $\pi_i > 0$
  - Za katere velja:

$$\pi_i = \lim_{t \to \infty} \pi_i(t)$$

- Velja tudi limita:

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\pi_i(t)}{dt} = 0$$

N. Zimic 2-40

Stacionarna stanja (nad.)

- Iz prejšnjih enačb sledi:

$$0 = \sum_{i \in S} q_{ij} \pi_i, \quad \forall j \in S$$

- V matrični obliki:

$$0 = \boldsymbol{\pi} \mathbf{Q}$$

- Ker je vsota verjetnosti vseh stanj 1, sledi:

$$\boldsymbol{\pi} \mathbf{1} = \sum_{i \in S} \pi_i = 1, \quad \mathbf{1} = [1, 1, \ldots, 1]^T$$

Globalno ravnotežje

- Za časovno homogene Markovske verige velja:

$$i, j \in S \quad q_{jj} = -\sum_{i, i \neq j} q_{ii}$$

- Iz česar sledi:

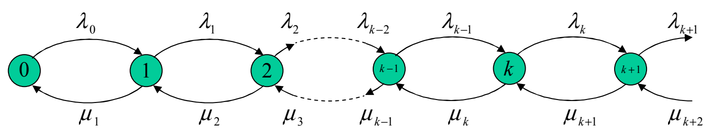
$$\sum_{i, i \neq j} q_{ij} \pi_i = -q_{ii} \pi_j$$

- Kar daje enačbo za globalno ravnotežje:

$$\sum_{i, i \neq j} q_{ij} \pi_i = \pi_j \sum_{i, i \neq j} q_{ij}$$

Rojstno smrtni sistem

- Rojstno smrtni proces je tisti proces, kjer je prehajanje možno samo med sosednjimi stanji:
  - iz stanja k v stanje $k+1$ imenujemo porojevanje zahtev
  - iz stanja k v stanje $k-1$ imenujemo umiranje zahtev
- Intenzivnosti prehajanja:
  - λ_k : intenzivnost porojevanja zahtev
  - μ_k : intenzivnost umiranja zahtev



N. Zimic 2-43

Rojstno smrtni sistem (nad.)

- Intenzivnosti prehajanja med stanji (elementi matrike **Q)** so:

$$q_{k,k+1} = \lambda_k$$
$$q_{k,k-1} = \mu_k$$
$$q_{k,j} = 0, \quad |k-j| > 1$$

- Na osnovi znanih izrazov, je za ergodični (vsa stanja morajo biti pozitivno periodično povratna) primer sistema:

$$\sum_{j \in S} q_{k,j} = 0$$

N. Zimic 2-44

Rojstno smrtni sistem (nad.)

- Iz prejšnjega izraza sledi:

$$q_{k,k-1} + q_{k,k} + q_{k,k+1} = 0$$
$$q_{k,k} = -(q_{k,k-1} + q_{k,k+1}) = -(\mu_k + \lambda_k)$$

- Matrika **Q** je:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu_1 & -(\mu_1+\lambda_1) & \lambda_1 & 0 & \cdots \\ 0 & \mu_2 & -(\mu_2+\lambda_2) & \lambda_2 & \cdots \\ 0 & 0 & \mu_3 & -(\mu_3+\lambda_3) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

N. Zimic 2-45

Verjetnost stanja

- Verjetnost stanja k v rojstno smrtnem sistemu je:

$$\pi_k(t) = P[X(t) = k]$$

- Možni dogodki v času $(t,t+\Delta t)$ so:
  - v času t pri populaciji k in v intervalu $(t,t+\Delta t)$ ni nobene spremembe
  - v času t pri populaciji k in v intervalu $(t,t+\Delta t)$ se porodi nova zahteva
  - v času t pri populaciji k in v intervalu $(t,t+\Delta t)$ pride do smrti zahteve

N. Zimic 2-46

Verjetnost stanja (nad.)

- Na osnovi naštetih dogodkov sledi:

$$\pi_k(t,t+\Delta t) = \pi_k(t)p_{k,k}(\Delta t) + \pi_{k-1}(t)p_{k-1,k}(\Delta t) + \pi_{k+1}(t)p_{k+1,k}(\Delta t) + o(\Delta t)$$

- V primeru $k = 0$:

$$\pi_0(t,t+\Delta t) = \pi_0(t)p_{0,0}(\Delta t) + \pi_1(t)p_{1,0}(\Delta t) + o(\Delta t)$$

- Funkcija $o(\Delta t)$ je funkcija, za katero velja:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$$

N. Zimic 2-47

Verjetnost stanja (nad.)

- Za časovno homogene Markovske verige velja, da je porojevanje in umiranje statistično neodvisno:
  - P[natančno eno rojstvo v času Δt, pri populaciji k] = $\lambda_k \Delta t + o(\Delta t)$
  - P[natančno ena smrt v času Δt, pri populaciji k] = $\mu_k \Delta t + o(\Delta t)$
  - P[natančno nobenega rojstva v času Δt, pri populaciji k] = $1 - \lambda_k \Delta t + o(\Delta t)$
  - P[natančno nobene smrti času Δt, pri populaciji k] = $1 - \mu_k \Delta t + o(\Delta t)$

N. Zimic 2-48

Verjetnost stanja (nad.)

- Verjetnost ohranjanja populacije k v času Δt je:

$$p_{k,k} = (1-\lambda_k \Delta t + o(\Delta t))(1-\mu_k \Delta t + o(\Delta t))$$

- Iz česar sledi:

$$\pi_k(t, t+\Delta t) = \pi_k(t)(1-\lambda_k \Delta t + o(\Delta t))(1-\mu_k \Delta t + o(\Delta t)) + \\ \pi_{k-1}(t)(\lambda_{k-1}\Delta t + o(\Delta t)) + \pi_{k+1}(t)(\mu_{k+1}\Delta t + o(\Delta t)) + o(\Delta t)$$

- In za stanje 0:

$$\pi_0(t, t+\Delta t) = \pi_0(t)(1-\lambda_0 \Delta t + o(\Delta t)) + \\ \pi_1(t)(\mu_1 \Delta t + o(\Delta t)) + o(\Delta t)$$

N. Zimic 2-49

Verjetnost stanja (nad.)

- Sprememba verjetnosti po času je:

$$\frac{\pi_k(t, t+\Delta t) - \pi_k(t)}{\Delta t} = -(\lambda_k + \mu_k)\pi_k(t) + \lambda_{k-1}\pi_{k-1}(t) + \\ \mu_{k+1}\pi_{k+1}(t) + o(\Delta t), \quad k \geq 1$$

$$\frac{\pi_0(t, t+\Delta t) - \pi_0(t)}{\Delta t} = -\lambda_0 \pi_0(t) + \mu_1 \pi_1(t) + o(\Delta t)$$

N. Zimic 2-50

Verjetnost stanja (nad.)

- Sprememba verjetnosti po limitnem procesu $\Delta t \to 0$:

$$\frac{d\pi_k(t)}{dt} = -(\lambda_k + \mu_k)\pi_k(t) + \lambda_{k-1}\pi_{k-1}(t) + \mu_{k+1}\pi_{k+1}(t), \quad k \geq 1$$

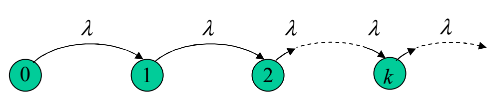
$$\frac{d\pi_0(t)}{dt} = -\lambda_0\pi_0(t) + \mu_1\pi_1(t)$$

- Enačbe predstavljajo množico diferencialno diferenčnih enačb za rojstno smrtni sistem, ki opisujejo dinamiko sistema.

N. Zimic 2-51

Čisti rojstni sistem

- Za čisti rojstni proces so intenzivnosti prehajanja:
  - intenzivnost porojevanja zahtev $\lambda_k = \lambda$
  - intenzivnost umiranja zahtev $\mu_k = 0$



$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -\lambda_1 & \lambda_1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -\lambda_2 & \lambda_2 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

N. Zimic 2-52

Čisti rojstni sistem (nad.)

- Za čisti rojstni sistem velja:

$$\frac{d\pi_k(t)}{dt} = -\lambda_k \pi_k(t) + \lambda_{k-1}\pi_{k-1}(t), \quad k \geq 1$$
$$\frac{d\pi_0(t)}{dt} = -\lambda_0 \pi_0(t)$$

- Začetno stanje čistega rojstnega sistema:

$$\pi_k(0) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \geq 1 \end{cases}$$

N. Zimic 2-53

Čisti rojstni sistem (nad.)

- Rešitev diferencialnih enačb je:

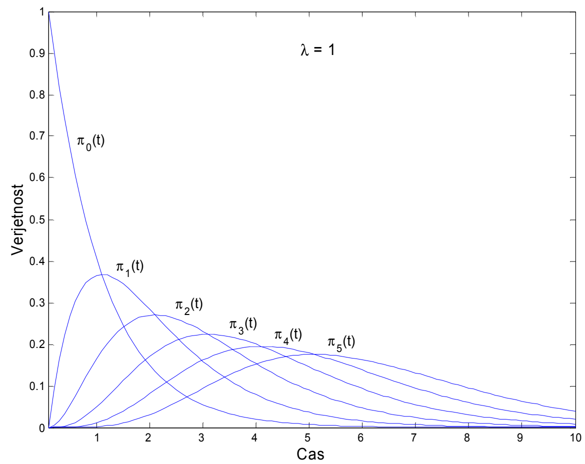
$$\pi_0(t) = e^{-\lambda t}$$
$$\frac{d\pi_1(t)}{dt} = -\lambda \pi_1(t) + \lambda e^{-\lambda t}$$
$$\pi_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$$

- Kar daje Poissonovo verjetnostno porazdelitev:

$$\boxed{\pi_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad k \geq 0, t \geq 0}$$

N. Zimic 2-54

Graf verjetnosti čisti rojstnega sistema



N. Zimic 2-55

Lastnosti čistega rojstnega procesa

- Poissonova verjetnostna porazdelitev:

$$P[X(s,s+t)=k]=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}, \quad k \geq 0, s,t \geq 0$$

- Porazdelitvena funkcija:

$$A(t)=1-P[\tilde{t}>t]=1-\pi_0(t)$$

$$A(t)=1-e^{-\lambda t}, \quad t>0$$

- Gostota verjetnosti:

$$a(t)=e^{-\lambda t}, \quad t>0$$

N. Zimic 2-56

Poisnova in eksponentna verjetnostna porazdelitev

- Poissonova verjetnostna porazdelitev

$$P[X(t)=k]=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}, \quad k\geq 0, t\geq 0$$

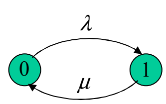
- Eksponentna verjetnostna porazdelitev podaja čas med dogodki Poissonove verjetnostne porazdelitve:

$$P[\tau\leq t]=1-P[\tau>t]=1-P[X(t)=0]$$

$$P[\tau\leq t]=1-e^{-\lambda t}$$

Markovski sistem z dvema stanjema

- Markovski sistem ima dve stanji $S=\{0,1\}$



- Matrika intenzivnosti prehajanja stanj je:

$$\mathbf{Q}=\begin{bmatrix}-\mu & \mu \\ \lambda & -\lambda\end{bmatrix}$$

Markovski sistem z dvema stanjema (nad.)

- Sistem diferencialnih enačb za podani sistem:

$$\frac{d\pi_0(t)}{dt} = -\mu\pi_0(t) + \lambda\pi_1(t)$$

$$\frac{d\pi_1(t)}{dt} = \mu\pi_0(t) - \lambda\pi_1(t)$$

- Velja tudi:

$$\pi_0(t) = 1 - \pi_1(t)$$

N. Zimic 2-59

Markovski sistem z dvema stanjema (nad.)

- Pri začetnem vektorju $\boldsymbol{\pi}(0) = [0,1]$ je rešitev sistema diferencialnih enačb:

$$\pi_1(t) = \frac{\mu}{\mu+\lambda} + \frac{\lambda}{\mu+\lambda}(e^{-(\mu+\lambda)t})$$

$$\pi_0(t) = 1 - \pi_1(t)$$

$$\pi_0(t) = \frac{\lambda}{\mu+\lambda} - \frac{\lambda}{\mu+\lambda}(e^{-(\mu+\lambda)t})$$

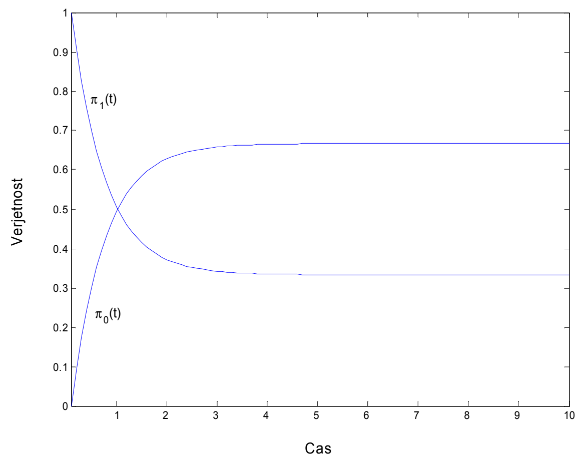
N. Zimic 2-60

Graf verjetnosti za sistem z dvema stanjema

$\boldsymbol{\pi}(0) = [0,1]$

$\lambda = 1$

$\mu = 0.5$



Stacionarno stanje

- Stacionarno stanje je:

$$\pi_k = \lim_{t \to \infty} \pi_k(t)$$

- Pri stacionarnih razmerah je $\frac{d\pi_k(t)}{dt} = 0$, zato se sistem diferencialnih enačb za rojstno smrtni sistem spremeni v diferenčne:

$$0 = -(\lambda_k + \mu_k)\pi_k + \lambda_{k-1}\pi_{k-1} + \mu_{k+1}\pi_{k+1}, \quad k \geq 1$$

$$0 = -\lambda_0 \pi_0 + \mu_1 \pi_1$$

Stacionarno stanje (nad.)

- Rešitev sistema enačb je:

$$\pi_k = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_k} \pi_0 = \pi_0 \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}$$

- Na osnovi enačbe $\sum_{i \in S} \pi_i = 1$ sledi:

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}}$$

Tipi strežnega sistema

- Rojstno smrtni sistem je pri parametrih :

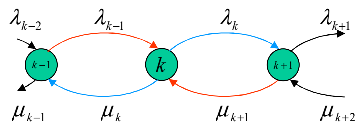
$$S_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} \qquad S_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}}$$

  - Ergodičen strežni sistem pri $S_1 < \infty$ in $S_2 = \infty$
  - Nepovranti strežni sistem pri $S_1 = \infty$ in $S_2 = \infty$
  - Prehodni strežni sistem $S_1 = \infty$ in $S_2 < \infty$
- Poenostavljeni pogoj za ergodičnost je:

$$\frac{\lambda_k}{\mu_{k+1}} < 1, \quad \forall k \geq 0$$

Globalno ravnotežje

- Iz enačbe za globalno ravnotežje splošne Markovske verige sledi enačba za rojstno smrtni sistem:



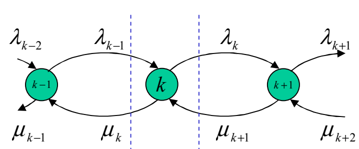
$$(\lambda_k + \mu_k)\pi_k = \lambda_{k-1}\pi_{k-1} + \mu_{k+1}\pi_{k+1}, \quad k > 0$$

$$\lambda_0 \pi_0 = \mu_1 \pi_1$$

N. Zimic 2-65

Lokalno ravnotežje

- Lokalno ravnotežje podaja relacijo med sosednjima stanjema:



$$\lambda_{k-1}\pi_{k-1} = \mu_k \pi_k \qquad \lambda_k \pi_k = \mu_{k+1}\pi_{k+1}$$

$$\pi_k = \pi_{k-1}\frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k}, \quad k > 0$$

N. Zimic 2-66