Petrijeve mreže

N. Zimic

Uvod v Petrijeve mreže

- Petrijeve mreže je uvedel gospod Carl A. Petri leta 1962
- Petrijeve mreže so orodje za modeliranje, formalno analizo in dizajn diskretnih sistemov
- Petrijeve mreže so matematično in grafično orodje za modeliranje
- Petrijeve mreže se uporabljajo za:
  - modeliranje in simulacijo komunikacijskih protokolov,
  - modeliranje in simulacijo sistemov v relnem času,
  - modeliranje in simulacijo varnostno kritičnih sistemov,
  - iskanje smrtnih objemov,
  - modeliranje in analizo programske opreme,
  - …

Definicija Petrijeve mreže

- Petrijeva mreža C je urejen četvorček:
  $C = (P, T, I, O)$
- Kjer sta P in T:

  $P = \{p_1, p_2, ..., p_n\},\quad n \geq 0,$ končna množica mest

  $T = \{t_1, t_2, ..., t_m\},\quad m \geq 0,$ končna množica prehodov

- Množici P in T sta tuji množici:
  $P \cap T = \varnothing$

Definicija Petrijeve mreže (nad.)

- I je vhodna funkcija, ki definira preslikavo iz množice prehodov T v posplošeno množico P^∞:

  $I : T \rightarrow P^\infty$

- O je izhodna funkcija, ki definira preslikavo iz množice prehodov T v posplošeno množico P^∞:

  $O : T \rightarrow P^\infty$

Posplošena množica X^∞ je tista množica, v kateri se lahko določen element v njej pojavi največ n krat.

Primer Petrijeve mreže

- Primer Petrijeve mreže:

$$C = (P, T, I, O)$$
$$P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$$
$$T = \{t_1, t_2, t_3\}$$

$$I(t_1) = \{p_1\} \qquad O(t_1) = \{p_2, p_3, p_5\}$$
$$I(t_2) = \{p_2, p_3, p_5\} \qquad O(t_2) = \{p_5, p_5\}$$
$$I(t_3) = \{p_3, p_5\} \qquad O(t_3) = \{p_4\}$$

Vhodna in izhodna mesta

- Število vhodnih mest p_i za prehod t_j je število elementov p_i v posplošeni množici $I(t_j)$:
  $\#(p_i, I(t_j))$
- Število izhodnih mest p_i za prehod t_j je število elementov p_i v posplošeni množici $O(t_j)$:
  $\#(p_i, O(t_j))$
- Mesto p_i je vhodno mesto za prehod t_j, če velja:
  $p_i \in I(t_j)$
- Mesto p_i je izhodno mesto za prehod t_j, če velja:
  $p_i \in O(t_j)$

Razširitev vhodne in izhodne funkcije

- Vhodno funkcijo I in izhodno funkcijo O razširimo tako, da velja:

$$I : P \to T^{\infty}$$
$$O : P \to T^{\infty}$$

- Ker je število vhodnih prehodov t_j za mesto p_i enako številu izhodnih mest p_i za prehod t_j:

$$\#(t_j, I(p_i)) = \#(p_i, O(t_j))$$

- In ker je število izhodnih prehodov t_j za mesto p_i enako številu vhodnih mest p_i za prehod t_j:

$$\#(t_j, O(p_i)) = \#(p_i, I(t_j))$$

Razširitev vhodne in izhodne funkcije (nad)

- Za prej prikazano Petrijevo mrežo lahko razširimo vhodne in izhodne funkcije:

$$C = (P, T, I, O)$$
$$P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$$
$$T = \{t_1, t_2, t_3\}$$

$I(p_1) = \varnothing$	$O(p_1) = \{t_1\}$
$I(p_2) = \{t_1\}$	$O(p_2) = \{t_2\}$
$I(p_3) = \{t_1\}$	$O(p_3) = \{t_2, t_3\}$
$I(p_4) = \{t_3\}$	$O(p_4) = \varnothing$
$I(p_5) = \{t_1, t_2, t_2\}$	$O(p_5) = \{t_2, t_3\}$

Petrijev graf

- Petrijevo mrežo lahko grafično ponazorimo z Petrijevim grafom.
- Elementi Petrijevega grafa so:
  - mesta, ki ustrezajo mestom p v Petrijevi mreži,
  - prehajanja, ki ustrezajo prehodom t v Petrijevi mreži,
  - usmerjene povezave, ki ustrezajo vhodnim in izhodnim funkcijam Petrijeve mreže.
- Mesta v Petrijevem grafu označujemo z krogom ◯ , prehajanja pa s črto | , oziroma pravokotnikom ▯ .

Petrijev graf (nad.)

- Petrijev graf G je biparitetni usmerjen multigraf $G=(V,A)$, kjer je $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_s\}$ množica spojišč in $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_r\}$ posplošena množica usmerjenih povezav $a_i=(v_j,v_k)\in V$. Množica V je $V=P\cup T$ in za vsako usmerjeno povezavo $a_i\in A$ velja: $a_i=(v_j,v_k)$, kjer je $v_j\in P$ in $v_k\in T$ ali $v_j\in T$ in $v_k\in P$.

Petrijev graf (nad.)

- Definirajmo $V = P \cup T$. A je posplošena množica usmerjenih povezav, tako za vsak $p_i \in P$ in $t_j \in T$ velja:

$$\#((p_i, t_j), A) = \#(p_i, I(t_j))$$

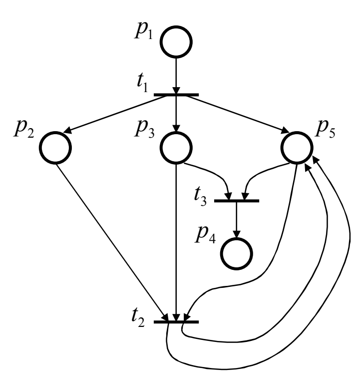
$$\#((t_j, p_i), A) = \#(p_i, O(t_j))$$

- V tem primeru je Petrijev graf $G(V,A)$ ekvivalenten Petrijevi merži $C=(P,T,I,O)$.

N. Zimic 1-11

Petrijev graf (nad.)

- Primer Petrijevega grafa za prej podano Petrijevo mrežo.



N. Zimic 1-12

Dualna in inverzna Petrijeva mreža

- Dualno Petrijevo mrežo dobimo z zamenjavo mest in prehajanj. Za Petrijevo mrežo C:

  $C = (P, T, I, O)$
- Je dualna Petrijeva mreža:

  $C_d = (T, P, I, O)$
- Inverzna Petrijeva mreža ima zamenjani vhodno in izhodno funkcijo:

  $C_d = (P, T, O, I)$

Dualna in inverzna Petrijeva mreža (nad.)

- Dualna Petrijeva mreža za prejšnji primer:

$$C = (P, T, I, O)$$
$$P = \{p_1, p_2, p_3\}$$
$$T = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$$

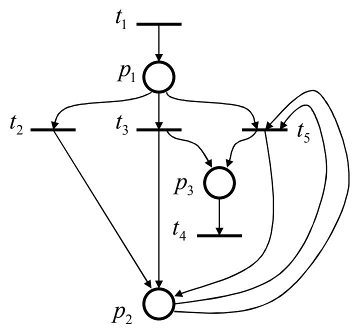
$I(p_1) = \{t_1\}$ $\quad$ $O(p_1) = \{t_2, t_3, t_5\}$

$I(p_2) = \{t_2, t_3, t_5\}$ $\quad$ $O(p_2) = \{t_5, t_5\}$

$I(p_3) = \{t_3, t_5\}$ $\quad$ $O(p_3) = \{t_4\}$

Dualna in inverzna Petrijeva mreža (nad.)

- Primer Petrijevega grafa za prej podano dualno Petrijevo mrežo.



Dualna in inverzna Petrijeva mreža (nad.)

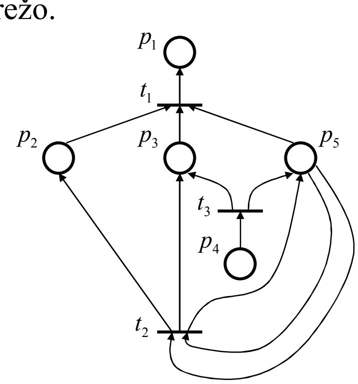
- Inverzna Petrijeva mreža za prejšnji primer :

$$C = (P, T, I, O)$$
$$P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$$
$$T = \{t_1, t_2, t_3\}$$

$O(t_1) = \{p_1\}$	$I(t_1) = \{p_2, p_3, p_5\}$
$O(t_2) = \{p_2, p_3, p_5\}$	$I(t_2) = \{p_5, p_5\}$
$O(t_3) = \{p_3, p_5\}$	$I(t_3) = \{p_4\}$

Dualna in inverzna Petrijeva mreža (nad.)

- Primer Petrijevega grafa za prej podano inverzno Petrijevo mrežo.



Označevanje v Petrijevi mreži

- Označevanje v Petrijevi mreži je dodeljevanje osnovnih postavk (žetonov) posameznim mestom v mreži. Število žetonov se lahko pri izvajanju Petrijeve mreže spreminja.
- Označevanje o v Petrijevi mreži C=(P,T,I,O) je funkcija, ki mestom P priredi pozitivna cela števila N:

  $$o : P \rightarrow N$$

- Označevanje lahko predstavimo tudi z označitvenim vektorjem:

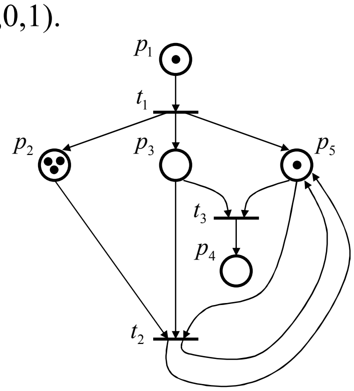
  $$\boldsymbol{o} = (o_1, o_2, \ldots, o_n), \qquad n = |P|$$

Označevanje v Petrijevi mreži (nad.)

- Označeno Petrijevo mrežo zapišemo:
  $M = (C, \boldsymbol{o})$
- Oziroma na daljši način:
  $M = (P, T, I, O, \boldsymbol{o})$
- V Petrijevem grafu se žetoni ponazarjajo s pikami v mestih. Če je število pik preveliko, se le te nadomestijo s številko, ki predstavlja število žetonov.

Označevanje v Petrijevi mreži (nad.)

- Primer označenega Petrijevega grafa z označitvijo $\boldsymbol{o}$=(1,3,0,0,1).



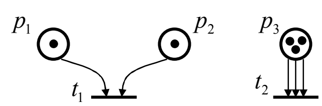
Izvajanje Petrijeve mreže

- Izvajanje Petrijeve mreže je pogojeno z označitvijo mreže $\boldsymbol{o}$, ki se pri izvajanju spreminja. Izvajanje mreže se izvede z vžigom izbranega prehoda t_i. Vžig se izvede tako, da se iz vhodnih mest odvzamejo ter na izhodna mesta dodajo žetoni.
- Prehod $t_j \in T$ v označeni Petrijevi mreži $M = (P, T, I, O, \boldsymbol{o})$ je izbran (omogočen), če za vsa mesta $p_i \in P$ velja $o(p_i) \geq \#(p_i, I(t_j))$.

N. Zimic 1-21

Izvajanje Petrijeve mreže (nad.)

- Primer Petrievih grafov, kjer je izpolnjen pogoj za vžig:



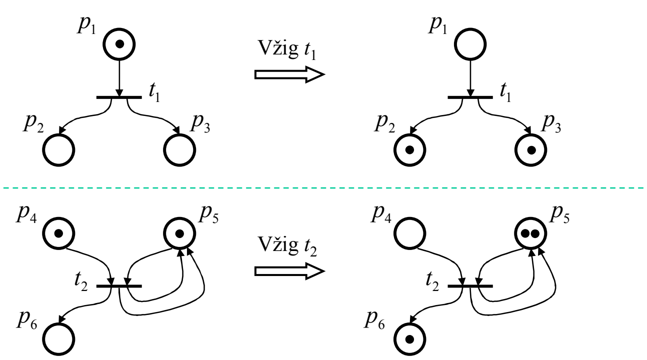
- Prehod t_j v označeni Petrijevi mreži z označitvijo $\boldsymbol{o}$ lahko vžge, kadar je izbrano (omogočeno). Vžig izbranega prehoda t_j nam da novo označitev:

$$o'(p_i) = o(p_i) - \#(p_i, I(t_j)) + \#(p_i, O(t_j))$$

N. Zimic 1-22

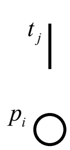
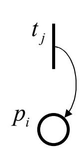
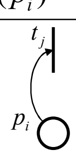
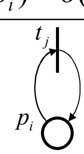
Izvajanje Petrijeve mreže (nad.)

- Primer izvajanja Petrievih grafov:



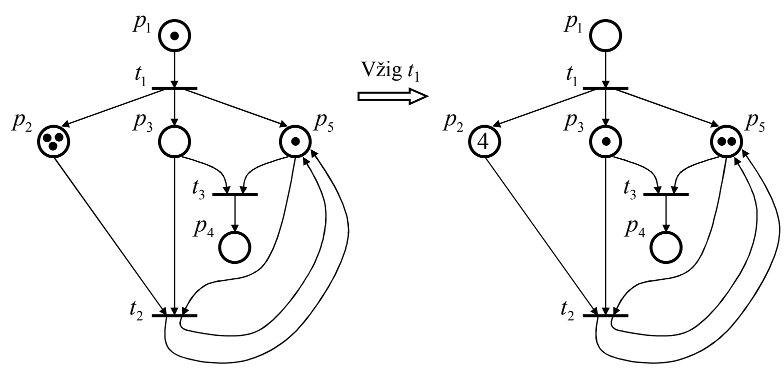
Izvajanje Petrijeve mreže (nad.)

- Možni primeri vžiga za poljubne pare prehodov in mest.

	$\#(p_i, O(t_j)) = 0$	$\#(p_i, O(t_j)) = 1$
$\#(p_i, I(t_j)) = 0$	 $o'(p_i) = o(p_i)$	 $o'(p_i) = o(p_i) + 1$
$\#(p_i, I(t_j)) = 1$	 $o'(p_i) = o(p_i) - 1$	 $o'(p_i) = o(p_i) - 1 + 1$

Izvajanje Petrijeve mreže (nad.)

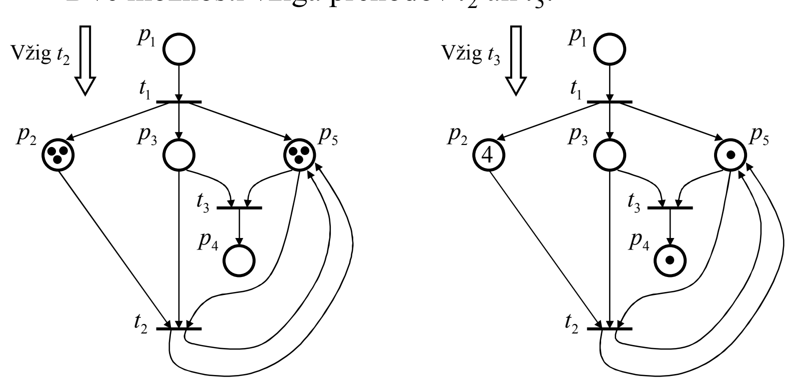
- Primer izvajanja Petrijevega grafa:



$\boldsymbol{o} = (1,3,0,0,1)$ $\quad$ $\boldsymbol{o}' = (0,4,1,0,2)$

Izvajanje Petrijeve mreže (nad.)

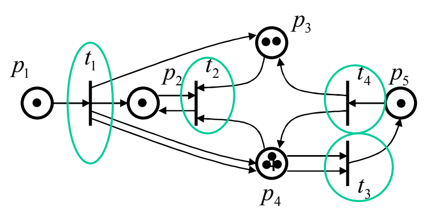
- Dve možnosti vžiga prehodov t_2 ali t_3:



$\boldsymbol{o}'' = (0,3,0,0,3)$ $\quad$ $\boldsymbol{o}'' = (0,4,0,1,1)$

Izvajanje Petrijeve mreže (nad.)

- Drugi primer izvajanja:



$$\boldsymbol{o} = (1,0,0,1,1)$$
$$\boldsymbol{o}' = (0,1,1,3,1)$$
$$\boldsymbol{o}'' = (0,1,2,4,0)$$
$$\boldsymbol{o}''' = (0,1,2,2,1)$$
$$\boldsymbol{o}'''' = (0,1,1,1,1)$$

Možni vžigi

Konec animacije!

Prostor stanj Petrijeve mreže

- Stanje Petrijeve mreže je določeno z označitvijo.
- Prostor stanj N^n Petrijeve mreže je množica vseh možnih označitev, če ima mreža *n* mest.
- Označitveni vektor o se pri izvajanju Petrijeve mreže spreminja. Za Petrijevo mrežo $C=(P,T,I,O)$ pri vžigu prehoda t_j lahko definiramo kot funkcijo prehajanja stanj:

$$\delta : N^n \times T \rightarrow N^n$$

- ki velja samo, če velja pogoj za vžig prehoda t_j :

$$o(p_i) \geq \#(p_i, I(t_j)), \quad \forall p_i \in P$$

Prostor stanj Petrijeve mreže (nad.)

- Funkcija naslednjega stanja je:

$$\delta(\boldsymbol{o},t_j)=\boldsymbol{o}'$$

- pri čemer velja:

$$\boldsymbol{o}'(p_i)=\boldsymbol{o}(p_i)-\#(p_i,I(t_j))+\#(p_i,O(t_j)),\quad \forall p_i\in P$$

- Petrijeva mreža C=(P,T,I,O) z začetno označitvijo $\boldsymbol{o}^0$ pri vžigu prehoda t_j zavzame novo označitev $\boldsymbol{o}^1$.

$$\boldsymbol{o}^1=\delta(\boldsymbol{o}^0,t_j)$$

- Pri vžigu naslednjega stanja t_k, zavzame Petrijeva mreža novo označitev $\boldsymbol{o}^2$:

$$\boldsymbol{o}^2=\delta(\boldsymbol{o}^1,t_k)$$

Prostor stanj Petrijeve mreže (nad.)

- Zaporedju vžigov v Petrijevi mreži:

$$(t_{j0},t_{j1},t_{j2},...)$$

- Ustreza zaporedje označitev v Petrijevi mreži:

$$(\boldsymbol{o}^0,\boldsymbol{o}^1,\boldsymbol{o}^2,...)$$

- Ti dve zaporedji ureja relacija:

$$\delta(\boldsymbol{o}^k,t_j)=\boldsymbol{o}^{k+1},\quad k=0,1,2,...$$

- Za Petrijevo mrežo z označitvijo $\boldsymbol{o}$ je označitev $\boldsymbol{o}$' neposredno dosegljiva, če obstaja prehod $t_j\in T$, tako da velja:

$$\delta(\boldsymbol{o},t_j)=\boldsymbol{o}'$$

Dosegljivost Petrijeve mreže

- Za Petrijevo mrežo $C=(P,T,I,O)$ je dosegljivost množica $R(C,\boldsymbol{o})$, kjer je o začetna označitev.
- V množico $R(C,\boldsymbol{o})$ spada začetna označitev:

$$\boldsymbol{o} \in R(C,\boldsymbol{o})$$

- In vse označitve $\boldsymbol{o}^k$, za katere velja:

$$\delta(\boldsymbol{o}^k, t_j) = \boldsymbol{o}^{k+1}, \quad k = 0,1,2,...$$

- pri čemer je $\boldsymbol{o}^0$ začetna označitev $\boldsymbol{o}$.

N. Zimic 1-31

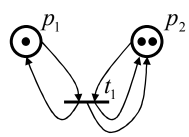
Dosegljivost Petrijeve mreže (nad.)

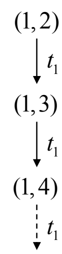
- V množico $R(C,\boldsymbol{o})$ spada začetna označitev in vse označitve, do katerih pridemo iz začetne označitve preko vžigov v Petrijevi mreži.
- Vsi vektorji v množici $R(C,\boldsymbol{o})$ so dosegljivi iz začetne označitve, zato se lahko dosegljivost izriše v obliki drevesne strukture. Na vrhu je začetna označitev v listih so označitve, ki so posledica vžigov v Petrijevi mreži.
- Iskanje dosegljivosti se zaključi:
  - ko ni več pogoja za vžig,
  - ko je dosežena označitev, ki je že bila razdelana,
  - ko se število žetonov nenehno povečuje.

N. Zimic 1-32

Dosegljivost Petrijeve mreže (nad.)

- Primer Petrijevega grafa, kjer se število žetonov pri izvajanju nenehno povečuje.

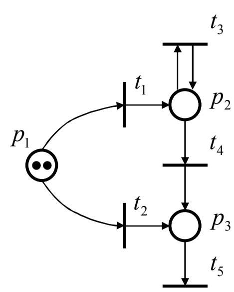




$$R(C,(1,2)) = \{(1,2),(1,3),(1,4),\ldots\}$$

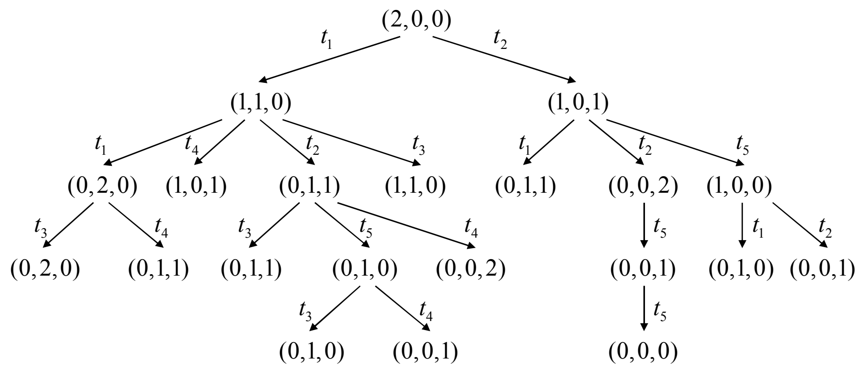
Primer izračuna dosegljivosti Petrijeve mreže

- Za podan Petrijev graf z začetno označitvijo (2,0,0) bomo izračunali dosegljivost.



Primer izračuna dosegljivosti Petrijeve mreže (nad.)

- Označitveni vektorji zapisani v drevesni strukturi.

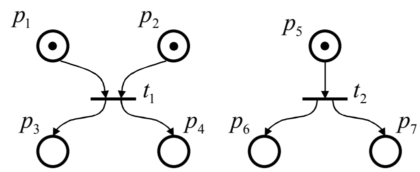


Značilnosti Petrijevih mrež

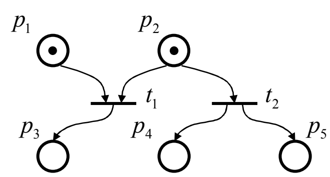
- Za Petrijevo mrežo velja:
  - vžig prehoda se izvede v idealnem času,
  - čas vžiga prehoda je logičen in ne absolutni čas,
  - v asinhronem primeru vžge prehod tj takoj ko je izbran,
  - v sinhronem primeru vžge ko nastopi urin cikel.
- Če je izbranih več prehajanj istočasno se lahko:
  - izbere prehajanje glede na prioritetni sistem,
  - prehajanje se lahko izbere naključno,
  - če primer ni konfliktn lahko vžge več prehajanj hkrati.

Značilnosti Petrijevih mrež (nad.)

- Izsek Petrijevega grafa, ki ni konflikten:



- Konflikten primer Petrijevega grafa:

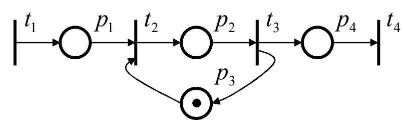


Modeliranje s Petrijevo mrežo

- Akcije v Petrijevi mreži se morajo odvijati pod določenimi pogoji.
- Akcije imenujemo tudi dogodke.
- Pogoje v kontroli dogodkov imenujemo kar pogoje.
- Pred izvrševanjem so predpogoji, po izvrševanju pa popogoji:
  - predpogoji: pogoji, ki morajo biti izpolnjeni, da se dogodek lahko izvrši,
  - popogoji: rezultat izvršitve dogodka.

Enostaven primer

- Enostaven primer modeliranja s Petrijevo mrežo:



t_1: prihod zahteve v sistem	p_1: zahteva čaka v vrsti
t_2: začetek procesiranja	p_2: procesiranje zahteve
t_3: konec procesiranja	p_3: naprava je prosta
t_4: zahteva zapusti sistem	p_4: zahteva je obdelana

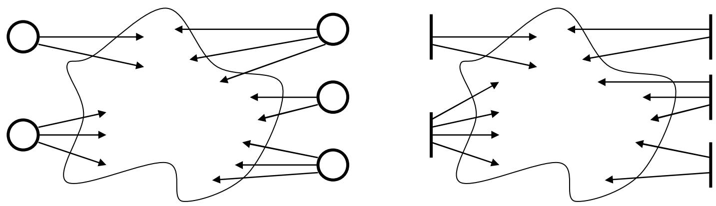
Enostaven primer (nad.)

- Tabela pogojev in popogojev za prejšnji primer:

Dogodki	Predpogoji	Popogoji
1		p_1
2	p_1, p_3	p_2
3	p_2	p_3, p_4
4	p_4	

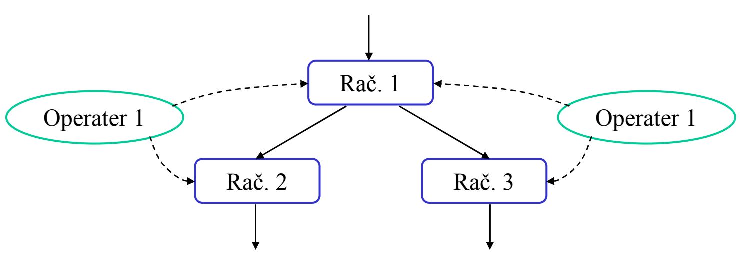
Povezovanje Petrijevih mrež z zunanjim svetom

- Petrijeve mreže lahko se lahko z zunanjim svetom povezujejo na dva načina: preko mest in preko prehodov.



Primer računalniškega sistema

- Računalniški sistem sestavljajo trije računalniki, ki jih poslužujeta dva operaterja. Zahteva se najprej postreže na prvem računalniku, za tem pa na drugem ali tretjem. Za izvajanje programa je potreben računalnik in operater.



Primer računalniškega sistema (nad.)

- Pogoji (mesta):
  a. program čaka na obdelavo na računalniku R_1,
  b. program po obdelavi na R_1 čaka na obdelavo na R_2 ali R_3,
  c. program je izvršen,
  d. računalnik R_1 je prost,
  e. računalnik R_2 je prost,
  f. računalnik R_3 je prost,
  g. operater O_1 je prost,
  h. operater O_2 je prost,
  i. operater O_1 poslužuje računalnik R_1,
  j. operater O_2 poslužuje računalnik R_1,
  k. operater O_1 poslužuje računalnik R_2,
  l operater O_2 poslužuje računalnik R_3,

Primer računalniškega sistema (nad.)

- Akcije - prehajanja v mreži:
  1. program prispe v obdelavo,
  2. operater O_1 začne z posluževanjem računalnika R_1,
  3. operater O_1 konča z posluževanjem računalnika R_1,
  4. operater O_2 začne z posluževanjem računalnika R_1,
  5. operater O_2 konča z posluževanjem računalnika R_1,
  6. operater O_1 začne z posluževanjem računalnika R_2,
  7. operater O_1 konča z posluževanjem računalnika R_2,
  8. operater O_2 začne z posluževanjem računalnika R_3,
  9. operater O_2 konča z posluževanjem računalnika R_3,
  10. obdelan program zapusti sistem.

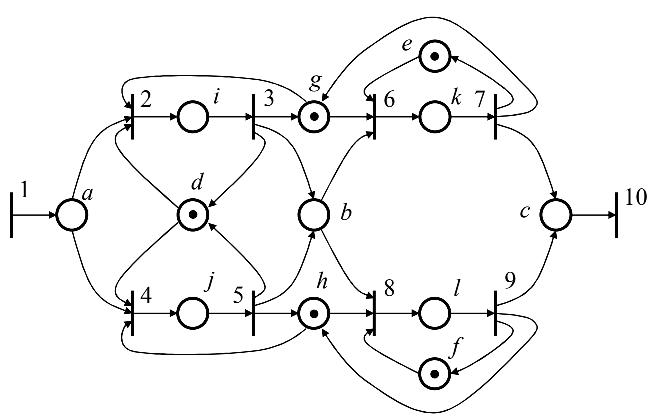
Primer računalniškega sistema (nad.)

- Tabela pogojev in popogojev za prejšnji primer:

Dogodki	Predpogoji	Popogoji
1		a
2	a, g, d	i
3	i	g, d, b,
4	a, h, d	j
5	j	b, h, d
6	b, g, e	k
7	k	c, g, e
8	b, f, h	l
9	l	c, f, g
10	c	

Primer računalniškega sistema (nad.)

- Označen Petrijev graf za primer računalniškega sistema:



Prevedba končnega avtomata v Petrijevo mrežo

- Končni avtomat A je petorček:

  $A = (X, Y, Z, \delta, \lambda)$
- Kjer so:

  X: končna neprazna množica vhodnih črk $\{x_1, x_2, \ldots\}$,
  Y: končna neprazna množica notranjih črk $\{y_1, y_2, \ldots\}$,
  Z: končna množica izhodnih črk $\{z_1, z_2, \ldots\}$,
  $\delta : Y \times X \rightarrow Y$ je funkcija naslednjega stanja,
  $\lambda : Y \times X \rightarrow Z$ je izhodna funkcija avotmata.

N. Zimic 1-47

Prevedba končnega avtomata v Petrijevo mrežo (nad.)

- Petrijeva mreža, ki je ekvivalenta avtomatu A je definirana:

  $C = (P, T, I, O)$

  $P = X \cup Y \cup Z,$ množica stanj Petrijeve mreže

  $T = \{t_{y,x} \mid y \in Y, x \in X\},$ množica prehodov

  $I(t_{y,x}) = \{y, x\},$ vhodne posplošene množice

  $O(t_{y,x}) = \{\delta(y,x), \lambda(y,x)\},$ izhodne posplošene množice

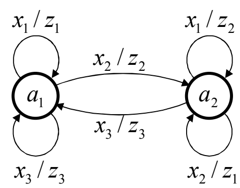
N. Zimic 1-48

Primer prevedbe avtomata v Petrijevo mrežo

- Podan je avotmat *A:*

$$A = (X, Y, Z, \delta, \lambda)$$
$$X = \{x_1, x_2, x_3\}$$
$$Y = \{a_1, a_2\}$$
$$Z = \{z_1, z_2, z_3\}$$

δ / λ	a_1	a_2
x_1	a_1 / z_1	a_2 / z_2
x_2	a_2 / z_2	a_2 / z_1
x_3	a_1 / z_3	a_1 / z_3



Primer prevedbe avtomata v Petrijevo mrežo (nad.)

- Petrijeva mreža *C*, ki je ekvivalenta avtomatu *A* je:

$$C = (P, T, I, O)$$

- Množica stanj *P* Petrijeve mreže:

$$P = X \cup Y \cup Z = \{x_1, x_2, x_3, a_1, a_2, z_1, z_2, z_3\}$$

- Množica prehodov *T* v Petrijevi mreži je:

$$T = \{t_{a_1,x_1}, t_{a_1,x_2}, t_{a_1,x_3}, t_{a_2,x_1}, t_{a_2,x_2}, t_{a_2,x_3}\}$$
$$T = \{t_{11}, t_{12}, t_{13}, t_{21}, t_{22}, t_{23}\}$$

Primer prevedbe avtomata v Petrijevo mrežo (nad.)

- Posplošene vhodne množice I so:

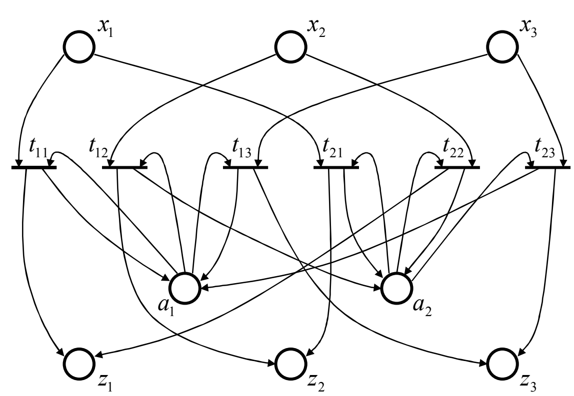
$$I(t_{11}) = \{a_1, x_1\} \qquad I(t_{21}) = \{a_2, x_1\}$$
$$I(t_{12}) = \{a_1, x_2\} \qquad I(t_{22}) = \{a_2, x_2\}$$
$$I(t_{13}) = \{a_1, x_3\} \qquad I(t_{23}) = \{a_2, x_3\}$$

- Posplošene izhodne množice O so:

$$O(t_{11}) = \{a_1, z_1\} \qquad O(t_{21}) = \{a_2, z_2\}$$
$$O(t_{12}) = \{a_2, z_2\} \qquad O(t_{22}) = \{a_2, z_1\}$$
$$O(t_{13}) = \{a_1, z_3\} \qquad O(t_{23}) = \{a_1, z_3\}$$

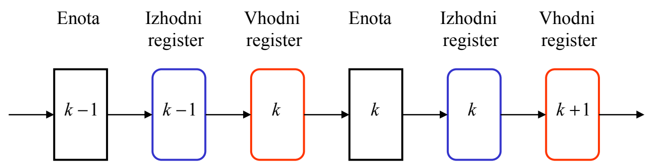
Primer prevedbe avtomata v Petrijevo mrežo (nad.)

- Petrijev graf za podan primer:



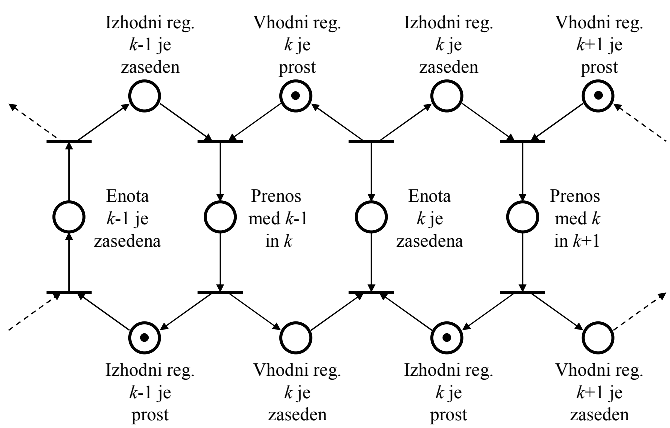
Modeliranje cevovoda

- Primer kontrolne enote, ki uporablja metodo cevovoda (pipeline).



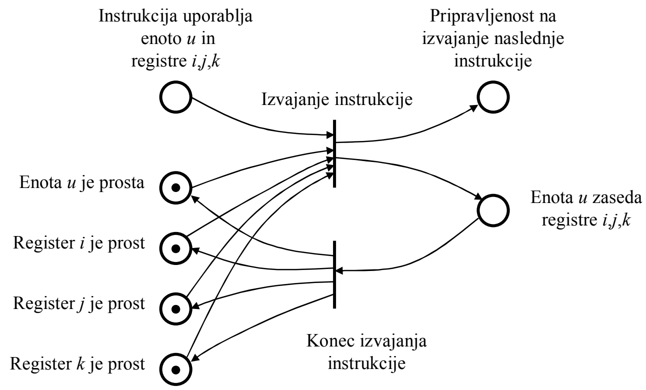
Modeliranje cevovoda (nad.)

- Petrijev graf za primer kontrolne enote:



Izvajanje instrukcije

- Izvajanje instrukcije, ki zaseda enoto *u* ter registre *i*,*j*,*k*.

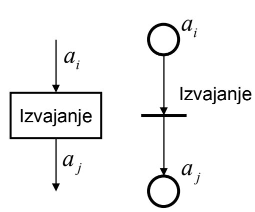


N. Zimic 1-55

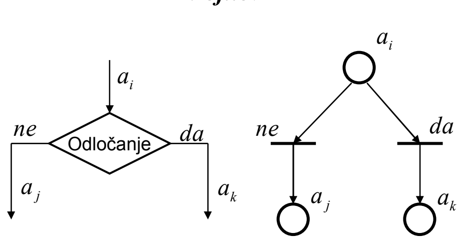
Uporaba Petrijevih mrež v programski opremi

- Programe v računalništvu sestavljajo dva osnovna gradnika: izvajalni operator in vejitev.
- Petrijev graf omenjenih gradnikov:

Izvajalni operator



Vejitev



N. Zimic 1-56

Primer programa

- Primer programa, ki ga bomo prevedli v Petrijevo mrežo:

```
begin
    Input (y1);
    Input (y2);
    y3 :=1;
    while y1>0 do begin
        if odd (y1) then begin
            y3 := y3*y2;
            y1 := y1 -1;
        end;
        y2 := y2*y2;
        y1 := y1 -2;
    end;
    Output (y3);
end;
```

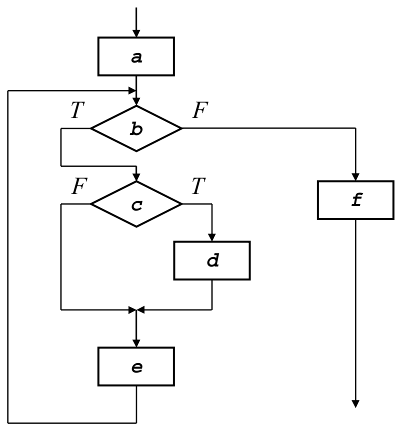

Primer programa (nad.)

- Akcije, ki se izvajajo v posameznem gradniku:

Akcija	***Opis akcije***
a	`Input (y1); Input (y2); y3 :=1;`
b	`y1>0`
c	`odd (y1)`
d	`y3 := y3*y2; y1 := y1 -1;`
e	`y2 := y2*y2; y1 := y1 -2č`
f	`Output (y3);`

Primer programa (nad.)

- Diagram poteka za podan primer:

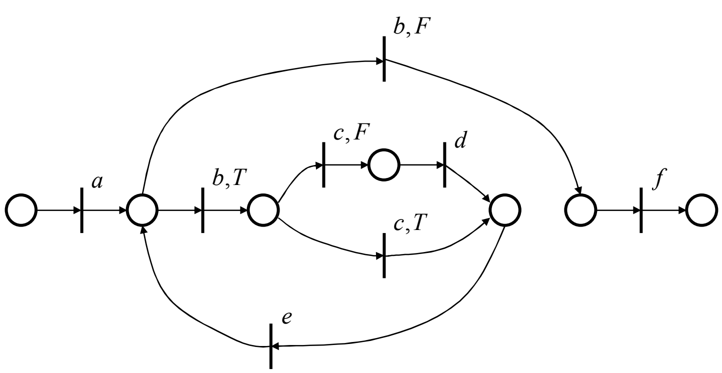


N. Zimic

1-59

Primer programa (nad.)

- Petrijev graf za podan primer programa:



N. Zimic

1-60

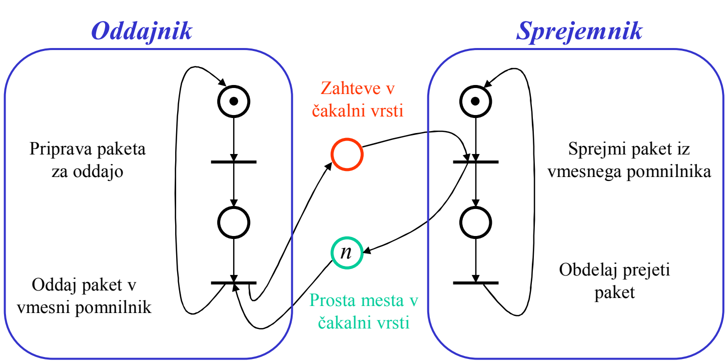
Sinhronizacija v Petrijevih mrežah

- Modeliranje sinhronizacije v Petrijevih mrežah se izvaja preko skupnih mest, kjer število žetonov v skupnem mestu pogojuje akcijo.
- Posamezni deli Petrijeve mreže , v primeru nekonfilknosti, se lahko izvajajo popolnoma ločeno. Konfliktnost pri izvajanju Petrijeve mreže se uporablja za sinhronizacijo posameznih neodvisnih procesov med seboj.

N. Zimic 1-61

Sinhronizacija v Petrijevih mrežah (nad.)

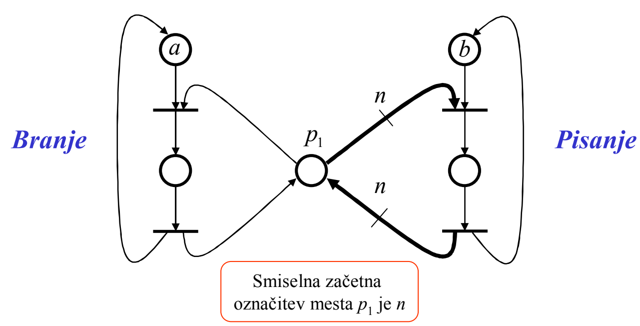
- Modeliranje sprejemnika in oddajnika z Petrijevim grafom:



N. Zimic 1-62

Sinhronizacija v Petrijevih mrežah (nad.)

- Modeliranje branja in pisanja v skupno bazo. Paralelno se lahko izvaja *n* branj in samo eno pisanje, ko branje ni v teku.



Matrični zapis Petrijeve mreže

- Petrijevo mrežo $C=(P,T,I,O)$ lahko opišemo tudi z dvema matrikama in sicer D^- in D^+, ki predstavljata vhodne in izhodne funkcije:

$$D^-[i,j]=\#(p_j,I(t_i))$$

$$D^+[i,j]=\#(p_j,O(t_i))$$

- Prehod je izbran (omogočen), če velja:

$$\boldsymbol{o} \geq e_j \cdot D^-$$

- e_j je enotni vektor, ki ima enico samo na mestu j.

$$e_j=[0,0,\ldots,1,\ldots,0]$$

Matrični zapis Petrijeve mreže (nad.)

- Če je prehod t_j izbran, lahko pride do vžiga le tega. Rezultat vžiga prehoda je:

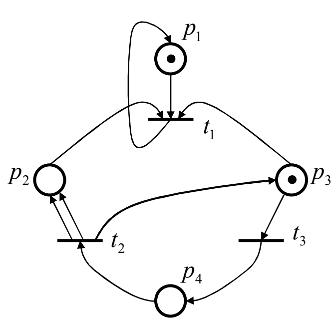
$$\delta(\boldsymbol{o},t_j) = \boldsymbol{o} - e_j \cdot D^- + e_j \cdot D^+ =$$
$$= \boldsymbol{o} + e_j \cdot (-D^- + D^+) =$$
$$= \boldsymbol{o} + e_j \cdot D$$

- Pri čemer je matrika D:

$$D = D^+ - D^-$$

Primer matrični zapisa

- Podan je označen Petrijev graf na osnovi katerega sta izračunani matriki:



$$D^- = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D^+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Primer matrični zapisa (nad.)

- Označitveni vektor $\boldsymbol{o}$ in matrika D sta:

$$\boldsymbol{o} = (1,0,1,1)$$

$$D = D^{+} - D^{-} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Primer matrični zapisa (nad.)

- Pogoj za vžig prehodov t_1, t_2 in t_3:

$$\boldsymbol{o} \geq e_1 \cdot D^{-} = [1,0,0] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [1,1,1,0] \quad \surd$$

$$\boldsymbol{o} \geq e_2 \cdot D^{-} = [0,1,0] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [0,0,0,1] \quad \cancel{\surd}$$

$$\boldsymbol{o} \geq e_3 \cdot D^{-} = [0,0,1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [0,0,1,0] \quad \surd$$

Primer matrični zapisa (nad.)

- V primeru vžiga t_1 je nova označitev:

$$\boldsymbol{o}' = \boldsymbol{o} + e_1 \cdot D = [1,0,1,1] + [1,0,0] \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= [1,0,1,1] + [1,-1,-1,0] = [1,0,0,0]$$

N. Zimic 1-69

Primer matrični zapisa (nad.)

- Primer izrisa Petrijevega grafa na osnovi vhodne in izhodne matrike ter označitvenega vektorja:

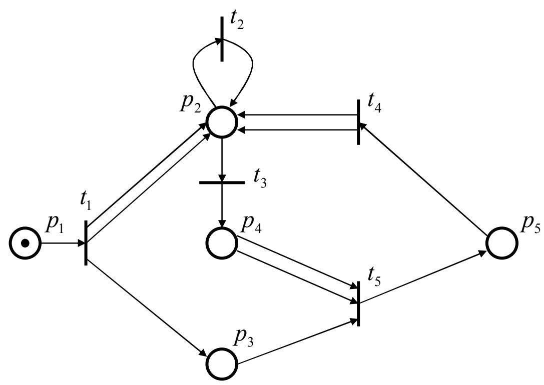
$$D^- = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad D^+ = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{o} = (1,0,0,0,0)$$

N. Zimic 1-70

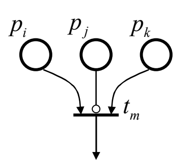
Primer matrični zapisa (nad.)

- Petrijev graf za podane podatke:



Razširitev Petrijevih mrež

- V Petrijeve mreže vpeljemo inhibicijski vhod, za katerega velja, da je mesto izbrano samo v primeru, ko mesto, ki je povezano na inhibicijski vhod, nima žetonov.
- Primer inhibicijskega vhoda:

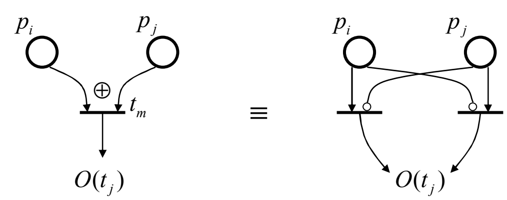


Pogoji, ki morajo biti izpolnjeni za vžig prehoda t_m so:

$$o(p_i) \geq 1$$
$$o(p_j) = 0$$
$$o(p_k) \geq 1$$

Razširitev Petrijevih mrež (nad.)

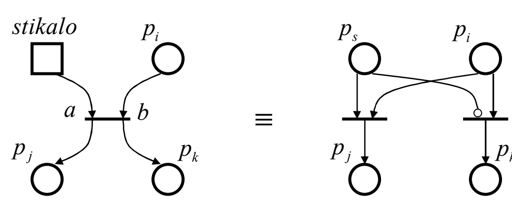
- Seštevanje po modulu dva (xor):



N. Zimic 1-73

Razširitev Petrijevih mrež (nad.)

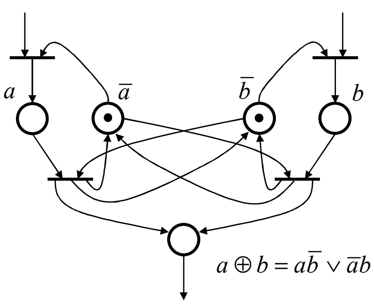
- Preklopniški vhod (stikalo - switch). Če stanje stikalo ni označeno in je izpolnjen pogoj za vžig bo rezultat izvajanja prenesen na stran *a*, sicer na stran *b*.



N. Zimic 1-74

Razširitev Petrijevih mrež (nad.)

- Ker je inhibicijski vhod posebnost Petrijevih mrež se ga izogibamo. Izognemo se mu tako, da uvedemo mesto, ki ima označitev, ki je nasprotna opazovanemu mestu. Graf prikazuje vsoto po modulu dva.



Modeliranje porazdeljenih procesov

- Porazdeljeno procesiranje lahko opišemo z grafom [Krop, Mler]:
  - procesorske enote so predstavljene s spojišči: $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_m\}$,
  - povezave prestavljajo poti za pošiljanje podatkov med procesorskimi enotami. Procesorske enote v_i in v_j sta med seboj povezani, če obstaja povezava $a_k=(v_i, v_j)$. Množica vseh povezav v grafu je $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_m\}$,
  - vsaki povezavi $a_k \in A$, ki ustreza paru $a_k=(v_i, v_j)$, pripada čakalna vrsta, ki je opisana s četvorčkom $(I_{ij}, V_{ij}, W_{ij}, T_{ij})$.

Modeliranje porazdeljenih procesov (nad.)

- Elementi čakalne vrste (I_{ij}, V_{ij}, W_{ij}, T_{ij}) so:
  - I_{ij} - število podatkovnih enot (zahtev) v čakalni vrsti,
  - V_{ij} - število zahtev, ki se po izvršenem procesiranju v enoti v_i postavijo v izhodno vrsto,
  - W_{ij} - število zahtev, ki se po izvršenem procesiranju v enoti v_j odstranijo iz čakalne vrste,
  - T_{ij} - prag, pri katerem se lahko začne procesiranje (minimalno število zahtev v čakalni vrsti).

$$v_i \xrightarrow{(I_{ij}, V_{ij}, W_{ij}, T_{ij})} v_j$$

Modeliranje porazdeljenih procesov (nad.)

- Pogoj za izvršitev procesiranja je, da je število zahtev v čakalni vrsti večje ali enako pragu:

  $$T_{ij} \geq I_{ij}$$

- Po procesiranju procesorja i se poveča število zahtev v čakalni vrsti:

  $$I_{ij}' = I_{ij} + V_{ij}$$

- Po procesiranju procesorja j se zamnjša število zahtev v čakalni vrsti:

  $$I_{ij}' = I_{ij} - W_{ij}$$

- Smiseln prag za procesiranje W_{ij} je $W_{ij} \leq T_{ij}$.

Modeliranje porazdeljenih procesov (nad.)

- Pogoj za izvršitev procesiranja je, da je število zahtev v čakalni vrsti večje ali enako pragu:

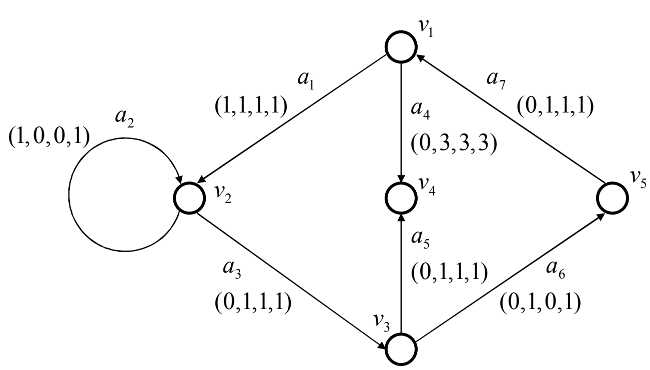
  $T_{ij} \geq I_{ij}$
- Po procesiranju procesorja i se poveča število zahtev v čakalni vrsti:

  $I_{ij}' = I_{ij} + V_{ij}$
- Po procesiranju procesorja j se zamnjša število zahtev v čakalni vrsti:

  $I_{ij}' = I_{ij} - W_{ij}$
- Smiseln prag za procesiranje W_{ij} je $W_{ij} \leq T_{ij}$.

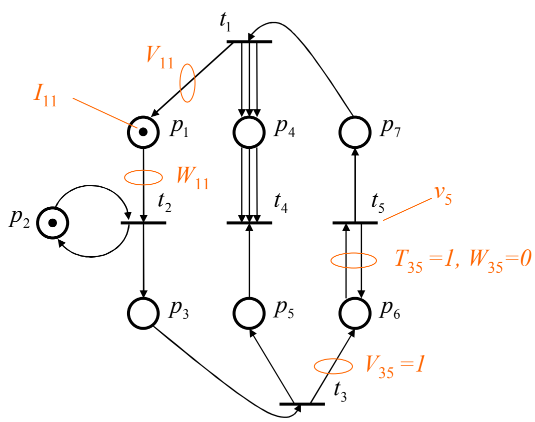
Modeliranje porazdeljenih procesov (nad.)

- Primer porazdeljenega sistema:



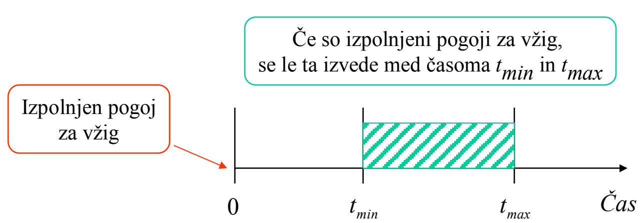
Modeliranje porazdeljenih procesov (nad.)

- Petrijev graf za primer porazdeljenega sistema:



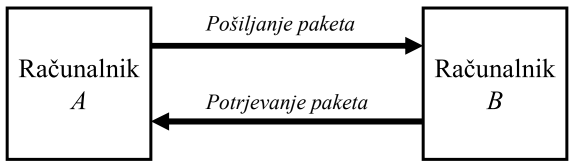
Časovne Petrijeve mreže

- Časovne Petrijeve mreže predstavljajo razširitev Petrijevh mrež.
- Čas je vpeljan kot časovno okno, v katerem se mora zgoditi vžig, od tega, ko je bil prehod izbran.
- Časovno okno je definirano s časoma t_{min} in $_{tmax}$.



Časovne Petrijeve mreže (nad.)

- Primer uporabe Petrijeve mreže v računalniških komunikacijah.
- Računalnik A pošlje paket računalniku B. Ko ga le ta sprejme in obdela, ga potrdi in s tem omogoči ponovno pošiljanje paketa.



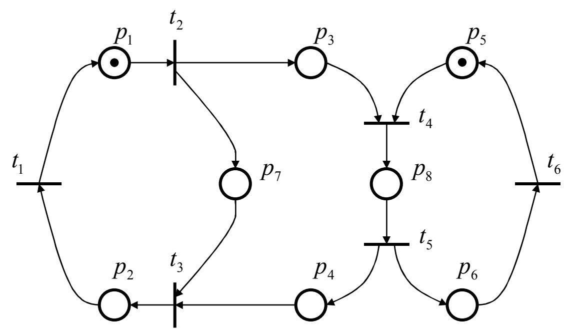
Časovne Petrijeve mreže (nad.)

- Mesta v Petrijevi mreži za primer komunikacijskega protokola so:

p_1 - Računalnik A ima paketa za računalnik b
p_2 - Računalnik A informira svoj proces, da je bil paket poslan
p_3 - Računalnik A informira računalnik B, da mu je bil paket poslan
p_4 - Računalnik B potrdi računalniku A prejem paketa
p_5 - Računalnik B je pripravljen sprejeti blok
p_6 - Računalnik B informira svoj proces, da je bil paket sprejet
p_7 - Računalnik A pričakuje od računalnika B potrditev sprejema
p_8 - Računalnik B je sprejel blok

Časovne Petrijeve mreže (nad.)

- Petrijev graf za primer komunikacijskega protokola:



N. Zimic 1-85

Časovne Petrijeve mreže (nad.)

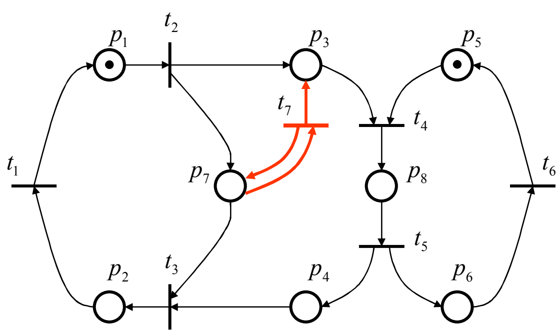
- Problem nastane, če računalnik B ne sprejme paketa, oziroma se le ta na poti izgubi. V tem primeru je potrebno ponovno poslati paket.
- Paket se ponovno pošlje z uvedbo prehoda t_7, ki mora vžgati, ko ni potrditve paketa v predvidenem času.
- Minimalni čas vžiga za prehod t_7 mora biti daljši od časa, ki je potreben za potrditev:

$$t_{7min} > t_{4max} + t_{3max} + t_{5max}$$

N. Zimic 1-86

Časovne Petrijeve mreže (nad.)

- Petrijev graf za primer komunikacijskega protokola, kjer je dodan prehod t_7, ki omogoča ponovno pošiljanje paketov.

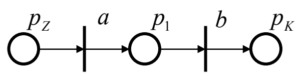


Jezik Petrijevh mrež

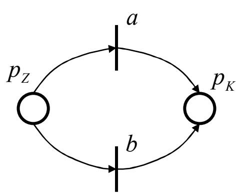
- Jezik Petrijevih mrež sestavljajo vse besede, ki so rezultat izvajanja Petrijeve mreže, od začetne označitve do končne označitve.
- Začetna označitev Petrijeve mreže ima samo en žeton v mestu, ki je določeno kot začetno in vsa ostala mesta brez žetonov.
- Končna označitev Petrijeve mreže ima samo en žeton v mestu, ki je določeno kot končno in vsa ostala mesta brez žetonov.
- Besede Petrijeve mreže so sestavljene iz črk, ki so rezultat vžiga posameznega prehoda v Petrijevi mreži.

Jezik Petrijevh mrež (nad.)

- Primeri jezikov, ki so rezultat Petrijeve mreže:



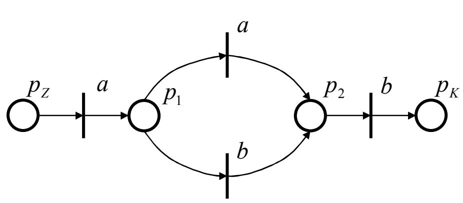
$L(C_1) = ab$



$L(C_2) = a + b$

Jezik Petrijevh mrež (nad.)

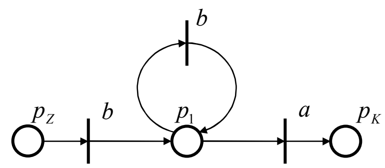
- Primeri jezikov, ki so rezultat Petrijeve mreže:



$L(C_1) = a(a + b)b$

Jezik Petrijevh mrež (nad.)

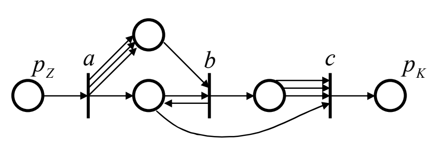
- Primeri jezikov, ki so rezultat Petrijeve mreže:



$$L(C_1) = b^+ a$$

Jezik Petrijevh mrež (nad.)

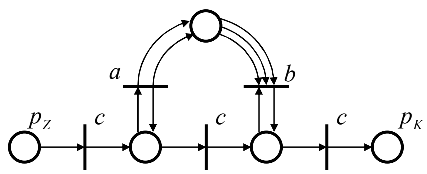
- Primeri jezikov, ki so rezultat Petrijeve mreže:



$$L(C) = ab^3 c$$

Jezik Petrijevh mrež (nad.)

- Primeri jezikov, ki so rezultat Petrijeve mreže:



$$L(C) = ca^{3n}cb^{2n}c, \quad n \geq 0$$