BOOLOVA ALGEBRA

Boolova algebra

- Boolova algebra je tako kot drugi dedukativni matematični sistemi definirana z:
  - množico elementov,
  - množico operatorjev,
  - množico aksiomov oziroma postulatov.

Osnovne definicije

- Če je S množica in sta x in y elementa, potem velja zapis:
  - $x \in S$, element x pripada množici S
  - $y \notin S$, element y ne pripada množici S
- Množico opišemo tako, da v zavitih oklepajih naštejemo elemente množice:
  - A = {1,2,3,4}, elementi množice A so števila 1,2,3 in 4

Osnovne definicije (nad.)

- Binarni operator, ki je definiran nad množico S, je pravilo, ki vsakemu paru elementov iz S enolično priredi element, ki prav tako pripada množici S.

Postulati - splošno

- Postulati so osnovne predpostavke iz katerih je možno izpeljati vse zakone, teoreme in značilnosti matematičnega sistema.
- Postulati so osnovne postavke in jih ni mogoče dokazati.

N. Zimic 2-5

Postulati - splošno (nad.)

- Postulati so:
  - Zaprtost
  - Zakon asociativnosti
  - Zakon komutativnosti
  - Element enote
  - Inverzni element
  - Zakon distributivnosti

N. Zimic 2-6

Zaprtost

- *Zaprtost*. Množica S je zaprta glede na binarni operator, če za vsak par elementov iz množice S in pravila, ki ga definira operator, dobimo element, ki je prav tako element množice S
- *Primer*. Množica naravnih števil N={1,2,3,…}, je zaprta glede na operator seštevanja (+), ker za vsak par naravnih števil obstaja vsota, ki je prav tako element množice naravnih števil

Zakon asociativnosti

- *Zakon asociativnosti*. Za binarni operator *, ki je definiran nad množico S, velja zakon asociativnosti, kadar je:

$$(x * y) * z = x * (y * z)$$

za vse elemente $x, y, z \in \mathrm{S}$

Zakon komutativnosti

- Zakon komutativnosti. Za binarni operator *, ki je definiran nad množico S, velja zakon komutativnosti, kadar je:

$$x * y = y * x$$

za vse pare elementov $x, y \in S$

N. Zimic

2-9

Nevtralni element

- *Nevtralni element.* Množica S ima nevtralni element za binarno operacijo *, kadar obstaja element $e \in S$ z lastnostjo:

$$e * x = x * e = x \text{ za vsak } x \in S$$

N. Zimic

2-10

Inverzni element

- *Inverzni element*. Element x ∈ S ima inverzni element y ∈ S, kadar je:

  $$x * y = y * x = e$$

  kjer je *e* nevtralni element v množici S za binarni operator *.

Zakon distributivnosti

- Če sta * in · binarna operatorja nad množico S, potem velja zakon distributivnosti, če:

  $$x * (y \cdot z) = (x * y) \cdot (x * z)$$

Aksiomi Boolove algebre

- Osnove Boolove algebre je postavil g. George Bool leta 1854
- Leta 1938 je g. C. E. Shannon uvedel dvovrednostno algebro, imenovano preklopna algebra (switching algebra)
- Boolova algebra je algebraična struktura, definirana nad elementi množice X in nad binarnima operatorjema konjunkcije in disjunkcije, pri čemer morajo biti izpolnjeni naslednji postulati.

Postulati

- *Zaprtost.*
  - P1: $x, y \in X; \quad x \vee y \in X$
  - P1*: $x, y \in X; \quad xy \in X$
- *Nevtralni element.*
  - P2: $x, 0 \in X; \quad x \vee 0 = x$
  - P2*: $x, 1 \in X; \quad x1 = x$
- *Komutativnost.*
  - P3: $x, y \in X; \quad x \vee y = y \vee x$
  - P3*: $x, y \in X; \quad xy = yx$

Postulati (nad.)

- *Distributivnost.*
  - P4: $x, y, z \in X; \quad x \vee (yz) = (x \vee y)(x \vee z)$
  - P4*: $x, y, z \in X; \quad x(y \vee z) = xy \vee xz$
- *Inverzni element.*
  - P5: $\forall x \in X, \exists \bar{x}; \quad x \vee \bar{x} = 1$
  - P5*: $\forall x \in X, \exists \bar{x}; \quad x\,\bar{x} = 0$
- *Število elementov.*
  - P6: Obstajata vsaj dva elementa x, y $\in$ X, tako da x $\neq$ y

Pravila

- Idempotenca:
  - $x \vee x \vee \ldots \vee x = x$
  - $x\,x \ldots x = x$
- Absorbcija:
  - $x \vee xy = x$
  - $x(x \vee y) = x$
- Asociativnost:
  - $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z) = x \vee y \vee z$
  - $(x\,y)\,z = x\,(y\,z) = x\,y\,z$

Pravila (nad.)

- De Morganov izrek:
  - $\overline{x \vee y \vee \ldots \vee z} = \overline{x}\,\overline{y}\ldots\overline{z}$
  - $\overline{x\,y\ldots z} = \overline{x} \vee \overline{y} \vee \ldots \vee \overline{z}$
- Za dokaz De Morganovega izreka je potrebno pravilo asociativnosti in obratno.

Primeri dokazov

- Primer: $x \vee x = x$

$x \vee x$	$= (x \vee x)1$	postulat 2*
	$= (x \vee x)(x \vee \overline{x})$	5
	$= x \vee x\overline{x}$	4
	$= x \vee 0$	5*
	$= x$	2

Primeri dokazov (nad.)

- Primer: $x\,x = x$

$$
\begin{aligned}
x\,x &= (x\,x) \vee 0 && \text{postulat 2}\\
&= (x\,x) \vee (x\,\overline{x}) && 5^*\\
&= x\,(x \vee \overline{x}) && 4^*\\
&= x1 && 5\\
&= x && 2^*
\end{aligned}
$$

N. Zimic 2-19

Primeri dokazov (nad.)

- Primer: $x \vee x\,y = x$

$$
\begin{aligned}
x \vee x\,y &= x1 \vee x\,y && \text{postulat 2*}\\
&= x\,(1 \vee y) && 4^*\\
&= x\,((y \vee 1)1) && 2^*\\
&= x\,((1 \vee y)(y \vee \overline{y})) && 5\\
&= x\,((y \vee 1)(y \vee \overline{y})) && 3\\
&= x\,(y \vee 1\overline{y}) && 4\\
&= x\,(y \vee \overline{y}) && 2^*\\
&= x1 && 5\\
&= x && 2^*
\end{aligned}
$$

N. Zimic 2-20

Dualnost

- Postulati so sestavljeni iz dveh delov, originalnega in dualnega
- Dualnost dosežemo z zamenjavo logičnih vrednosti (0 z 1 in obratno) ter zamenjavo operatorjev konjunkcije in disjunkcije
- Dualni operator je definiran:

$$f_d(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bar{f}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$$

Dualnost (nad.)

- Postulati in pravila

$(a) \quad x \vee 0 = x$	$(b) \quad x1 = x$
$(a) \quad x \vee \bar{x} = 1$	$(b) \quad x\bar{x} = 0$
$(a) \quad x \vee x = x$	$(b) \quad x\,x = x$

$$\bar{\bar{x}} = x$$

$(a) \quad x \vee y = y \vee x$	$(b) \quad x\,y = y\,x$
$(a) \quad x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$	$(b) \quad x(y\,z) = (x\,y)\,z$
$(a) \quad x\,(y \vee z) = x\,y \vee x\,z$	$(b) \quad x \vee y\,z = (x \vee y)(x \vee z)$
$(a) \quad \overline{(x \vee y)} = \bar{x}\,\bar{y}$	$(b) \quad \overline{(x\,y)} = \bar{x} \vee \bar{y}$
$(a) \quad x \vee x\,y = x$	$(b) \quad x(x \vee y) = x$

PREKLOPNE FUNKCIJE IN PREKLOPNA VEZJA

Preklopne funkcije

- Preklopne spremenljivke (neodvisne spremenljivke):

  $x_1, x_2, \ldots, x_n$

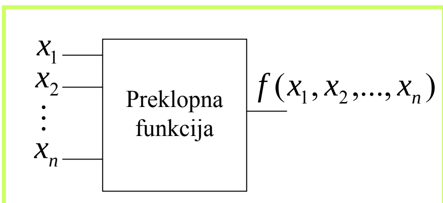
  $x_i \in \{0,1\}, \quad i = 1,2,\ldots,n$

- Preklopne funkcija (odvisna spremenljivka) nad n spremenljivkami:

  $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \{0,1\}$

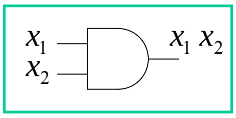
- Primer:

  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1\, x_2 \vee \bar{x}_3$



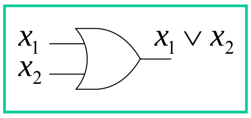
Logični simboli

Konjunkcija



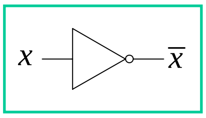
x_1, x_2	$f(x_1, x_2)$
0 0	0
0 1	0
1 0	0
1 1	1

Disjunkcija



x_1, x_2	$f(x_1, x_2)$
0 0	0
0 1	1
1 0	1
1 1	1

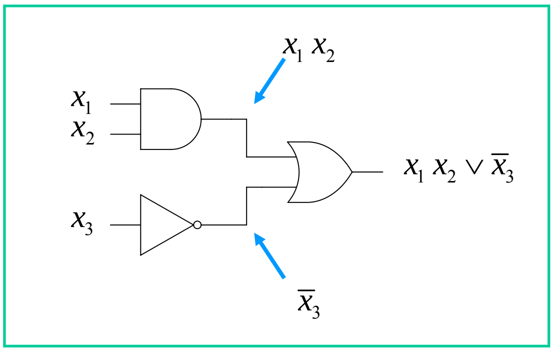
Negacija



x	$\overline{x}$
0	1
1	0

Primer logične sheme

- Logična funkcija: $f(x_1, x_2, x_3) = x_1\, x_2 \vee \overline{x}_3$



Pravilnostna tabela

- Leva stran predstavlja vhodne vektorje:

  $\tilde{w}_i = (w_{1i}, w_{2i}, \ldots, w_{ni})$

  kjer je w_{ji} j-ta cifra (z leve) v binarnem zapisu števila i.
- Primer:

  $\tilde{w}_3 = (0,\ldots,0,1,1)$
- Desna stran predstavlja vrednost pri določenem vhodnem vektorju
- Vseh vhodnih vektorjev je 2^n , kjer je n število vhodnih spremenljivk

$x_1, x_2, \ldots, x_n$	$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
$\tilde{w}_0$	$f(\tilde{w}_0)$
$\tilde{w}_1$	$f(\tilde{w}_1)$
$\vdots$	$\vdots$
$\tilde{w}_{2^n-2}$	$f(\tilde{w}_{2^n-2})$
$\tilde{w}_{2^n-1}$	$f(\tilde{w}_{2^n-1})$

Pravilnostna tabela (nad.)

- Leva stran predstavlja vse možne vhodne vektorje, od vektorja 0 0 0 do vektorja 1 1 1
- Na desni strani so funkcijske vrednosti pri posameznem vhodnem vektorju
- Primer funkcije:

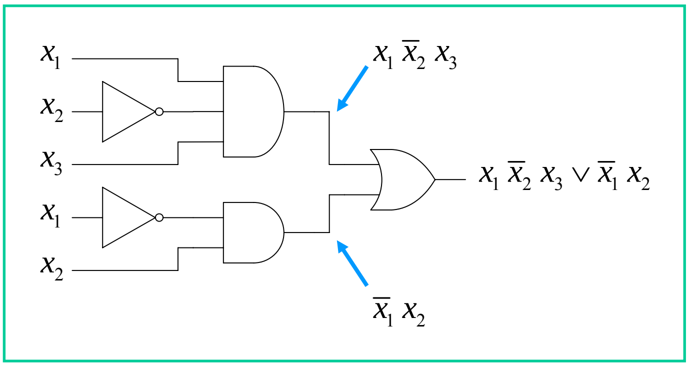
  $f(x_1, x_2, x_3) = \boxed{x_1\, \bar{x}_2\, x_3} \vee \boxed{\bar{x}_1\, x_2}$

x_1, x_2, x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0 0 0	$f(0,0,0) = 0$
0 0 1	$f(0,0,1) = 0$
0 1 0	$f(0,1,0) = 1$
0 1 1	$f(0,1,1) = 1$
1 0 0	$f(1,0,0) = 0$
1 0 1	$f(1,0,1) = 1$
1 1 0	$f(1,1,0) = 0$
1 1 1	$f(1,1,1) = 0$

Pravilnostna tabela (nad.)

- Logčna shema za prejšnji primer:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1\,\overline{x}_2\,x_3 \vee \overline{x}_1\,x_2$$



Pravilnostna tabela (nad.)

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1\,\overline{x}_2\,x_3 \vee \overline{x}_1\,x_2$$

x_1, x_2, x_3	$x_1\,\overline{x}_2\,x_3$	$\overline{x}_1\,x_2$	$f(x_1, x_2, x_3)$
0 0 0	0	0	0
0 0 1	0	0	0
0 1 0	0	1	1
0 1 1	0	1	1
1 0 0	0	0	0
1 0 1	1	0	1
1 1 0	0	0	0
1 1 1	0	0	0

Pravilnostna tabela (nad.)

- Primer pravilnostne tabele za več funkcij:

$f_1(x_1,x_2,x_3) = x_1\,x_2\,\overline{x}_3$

$f_2(x_1,x_2,x_3) = x_1 \vee \overline{x}_2\,x_3$

$f_3(x_1,x_2,x_3) =$

$= \boxed{\overline{x}_1\,\overline{x}_2\,x_3} \vee \boxed{\overline{x}_1\,x_2\,x_3} \vee \boxed{x_1\,\overline{x}_2}$

$f_4(x_1,x_2,x_3) = x_1\,\overline{x}_2 \vee \overline{x}_1\,x_3$

x_1, x_2, x_3	f_1	f_2	f_3	f_4
0 0 0	0	0	0	0
0 0 1	0	1	$\boxed{1}$	1
0 1 0	0	0	0	0
0 1 1	0	0	$\boxed{1}$	1
1 0 0	0	1	$\boxed{1}$	1
1 0 1	0	1	$\boxed{1}$	1
1 1 0	1	1	0	0
1 1 1	0	1	0	0

Mintermi in makstermi

- Če dve spremenljivki povezujemo s konjunkcijo in pri tem uporabimo še negacijo, dobimo:
  $x\,y,\ \ x\,\overline{y},\ \ \overline{x}\,y,\ \ \overline{x}\,\overline{y}$
- Takšne konjunkcije imenujemo mintermi. Pri n spremenljivkah imamo 2^n mintermov.
- Minterme označujemo s številkami od 0 do 2^n-1:

  $m_0, m_1, \ldots, m_{2^n-1}$

Mintermi in maks. (nad.)

- Splošna enačba minterma je:

$$m_i = x_1^{w_{1i}} x_2^{w_{2i}} \ldots x_n^{w_{ni}} \qquad i = 0,1,\ldots,2^n - 1$$

$$x^w = \begin{cases} x, & pri\ w = 1 \\ \overline{x}, & pri\ w = 0 \end{cases}$$

- Minterm m_5 za tri spremenljivke:

$$m_5 = x_1^{w_{1,5}} x_2^{w_{2,5}} x_3^{w_{3,5}} = x_1^1 x_2^0 x_3^1 = x_1 \overline{x}_2 x_3$$

Mintermi in maks. (nad.)

- Podobno je definiran tudi maksterem:

$$M_{2^n-1-i} = x_1^{\overline{w}_{1i}} \vee x_2^{\overline{w}_{2i}} \vee \ldots \vee x_n^{\overline{w}_{ni}} \qquad i = 0,1,\ldots,2^n - 1$$

- Maxterm M_5 za tri spremenljivke

$$M_5 = x_1^{\overline{w}_{1,2}} \vee x_2^{\overline{w}_{2,2}} \vee x_3^{\overline{w}_{3,2}} = x_1^{\overline{0}} \vee x_2^{\overline{1}} \vee x_3^{\overline{0}} =$$
$$= x_1^1 \vee x_2^0 \vee x_3^1 = x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3$$

Mintermi in maks. (nad.)

- Lastnosti mintermov:

x_1, x_2	$\overline{x}_1 \overline{x}_2$	$\overline{x}_1 x_2$	$x_1 \overline{x}_2$	$x_1 x_2$
0 0	1	0	0	0
0 1	0	1	0	0
1 0	0	0	1	0
1 1	0	0	0	1

Mintermi in maks. (nad.)

- Lastnosti makstermov:

x_1, x_2	$x_1 \vee x_2$	$x_1 \vee \overline{x}_2$	$\overline{x}_1 \vee x_2$	$\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2$
0 0	0	1	1	1
0 1	1	0	1	1
1 0	1	1	0	1
1 1	1	1	1	0

Mintermi in maks. (nad.)

x_1, x_2, x_3	mintermi		makstermi	
0 0 0	$\overline{x}_1\,\overline{x}_2\,\overline{x}_3$	m_0	$x_1 \vee x_2 \vee x_3$	M_7
0 0 1	$\overline{x}_1\,\overline{x}_2\,x_3$	m_1	$x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3$	M_6
0 1 0	$\overline{x}_1\,x_2\,\overline{x}_3$	m_2	$x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3$	M_5
0 1 1	$\overline{x}_1\,x_2\,x_3$	m_3	$x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3$	M_4
1 0 0	$x_1\,\overline{x}_2\,\overline{x}_3$	m_4	$\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3$	M_3
1 0 1	$x_1\,\overline{x}_2\,x_3$	m_5	$\overline{x}_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3$	M_2
1 1 0	$x_1\,x_2\,\overline{x}_3$	m_6	$\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3$	M_1
1 1 1	$x_1\,x_2\,x_3$	m_7	$\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3$	M_0

Mintermi in maks. (nad.)

- Lastnosti mintermov in makstermov:

$$\overline{m}_i = M_{2^n-1-i} \qquad \overline{M}_i = m_{2^n-1-i}$$

$$m_i \vee M_{2^n-1-i} = 1 \qquad m_i\, M_{2^n-1-i} = 0$$

$$\bigvee_{i=0}^{2^n-1} m_i = 1 \qquad \mathop{\&}_{i=0}^{2^n-1} M_i = 0$$

$$m_i\, m_j = 0 \quad i \neq j \qquad M_i \vee M_j = 1 \quad i \neq j$$

PDNO

- Popolna disjunktivna normalna oblika (PDNO):

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigvee_{i=0}^{2^n-1} m_i \quad f_i$$

- f_i je vrednost funkcije pri i-tem vhodnem vektorju

- Lastnosti:
  - funkcija je popolna: termi (na prvem nivoju) so sestavljeni iz vseh vhodnih spremenljivk
  - funkcija normalna: sestavljena iz dveh nivojev

PDNO (nad.)

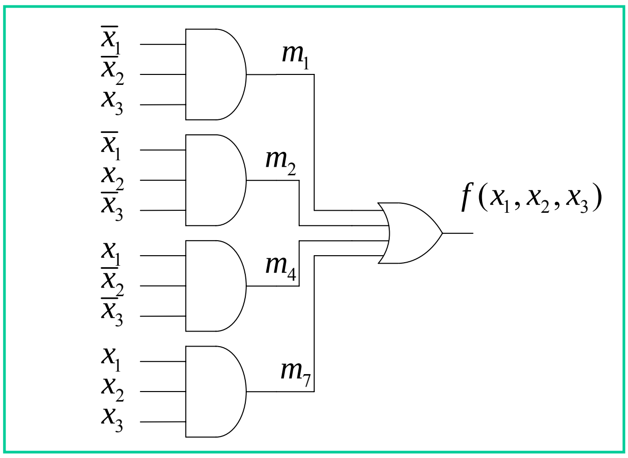
x_1, x_2, x_3	m_0	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	m_7	$f(x_1, x_2, x_3)$
0 0 0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0 0 1	0	1	0	0	0	0	0	0	1
0 1 0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
0 1 1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
1 0 0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
1 0 1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
1 1 0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
1 1 1	0	0	0	0	0	0	0	1	1

PDNO (nad.)

- Primer zapisa funkcije v PDNO

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, x_3) = {} & f_0\, m_0 \vee f_1\, m_1 \vee f_2\, m_2 \vee f_3\, m_3 \vee \\
& \vee f_4\, m_4 \vee f_5\, m_5 \vee f_6\, m_6 \vee f_7\, m_7 \\
= {} & 0\, m_0 \vee 1\, m_1 \vee 1\, m_2 \vee 0\, m_3 \vee \\
& \vee 1\, m_4 \vee 0\, m_5 \vee 0\, m_6 \vee 1\, m_7 \\
= {} & m_1 \vee m_2 \vee m_4 \vee m_7 \\
= {} & \overline{x}_1\, \overline{x}_2\, x_3 \vee \overline{x}_1\, x_2\, \overline{x}_3 \vee x_1\, \overline{x}_2\, \overline{x}_3 \vee x_1\, x_2\, x_3
\end{aligned}
$$

PDNO (nad.)



PKNO

- Popolna konjuktinvna normalna oblika (PKNO):

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathop{\&}_{i=0}^{2^n-1} (M_{2^n-1-i} \vee f_i)$$

- f_i je vrednost funkcije pri i-tem vhodnem vektorju

- Lasnosti:
  - funkcija je popolna: termi (na prvem nivoju) so sestavljeni iz vseh vhodnih spremenljivk
  - funkcija normalna: sestavljena iz dveh nivojev

PKNO (nad.)

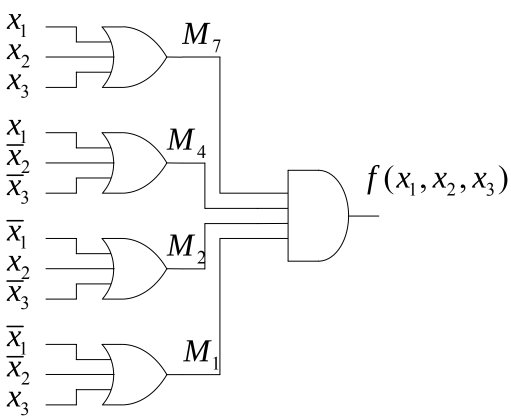
x_1, x_2, x_3	M_7	M_6	M_5	M_4	M_3	M_2	M_1	M_0	$f(x_1, x_2, x_3)$
0 0 0	0	1	1	1	1	1	1	1	0
0 0 1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
0 1 0	1	1	0	1	1	1	1	1	1
0 1 1	1	1	1	0	1	1	1	1	0
1 0 0	1	1	1	1	0	1	1	1	1
1 0 1	1	1	1	1	1	0	1	1	0
1 1 0	1	1	1	1	1	1	0	1	0
1 1 1	1	1	1	1	1	1	1	0	1

PKNO (nad.)

- Primer zapisa funkcije v PKNO

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,x_3) = {} & (f_0 \vee M_7)(f_1 \vee M_6)(f_2 \vee M_5)(f_3 \vee M_4) \\
& (f_4 \vee M_3)(f_5 \vee M_2)(f_6 \vee M_1)(f_7 \vee M_0) \\
= {} & (0 \vee M_7)(1 \vee M_6)(1 \vee M_5)(0 \vee M_4) \\
& (1 \vee M_3)(0 \vee M_2)(0 \vee M_1)(1 \vee M_0) \\
= {} & M_7 M_4 M_2 M_1 \\
= {} & (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3)(\overline{x}_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3)(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3)
\end{aligned}
$$

PKNO (nad.)



PDNO in PKNO

- Zapis PDNO:

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = m_1 \vee m_2 \vee m_4 \vee m_7$$
$$= \vee(1,2,4,7)$$

- Zapis PKNO:

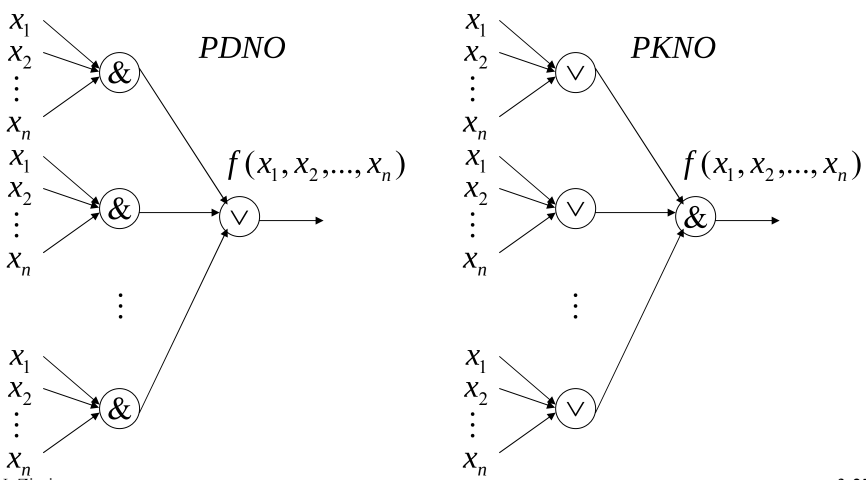
$$f_1(x_1, x_2, x_3) = M_7\, M_4\, M_2\, M_1$$
$$= \&(7,4,2,1)$$

PDNO in PKNO (nad.)

- Pretvorba med oblikami zapisa

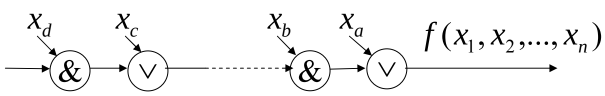
$$f_1(x_1, x_2, x_3) = \vee(1,4,5,6,7)$$
$$\overline{f_1(x_1, x_2, x_3)} = \vee(0,2,3) = m_0 \vee m_2 \vee m_3$$
$$f_1(x_1, x_2, x_3) = \overline{(m_0 \vee m_2 \vee m_3)} = \overline{m}_0\, \overline{m}_2\, \overline{m}_3$$
$$f_1(x_1, x_2, x_3) = M_7\, M_5\, M_4 = \&(7,5,4)$$

Popolne normalne oblike

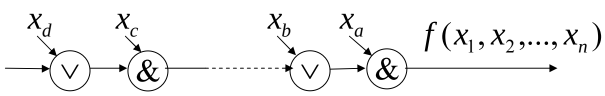


Verižne oblike

- Disjunktivna verižna nenormalna oblika DVNNO

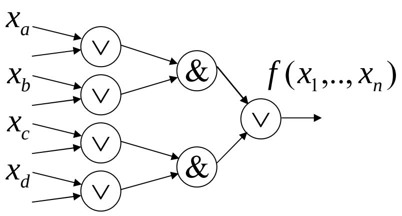


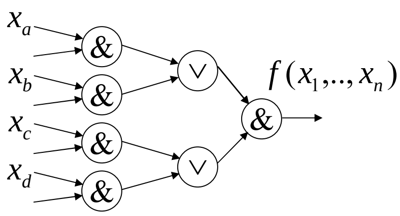
- Konjunktivna verižna nenormalna oblika KVNNO



Drevesna nenormalna oblika

- Primer disjunktivne in konjunktivne drevesne nenormalne oblike (DDNNO, KDNNO)





Logične funkcije

- Za n spremenljivk obstaja 2^{2^n} logičnih funkcij
- Za dve neodvisni spremenljivki obstaja poleg operacij konjunkcije in disjunkcije še 14 drugih funkcij

Logične funkcije (nad.)

- Za dve neodvisni spremenljivki obstaja 16 funkcij:

x_1	x_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

Logične funkcije (nad.)

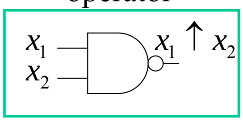
$f_0 = 0$		konstanta 0
$f_1 = \overline{x_1 \vee x_2}$	$x_1 \downarrow x_2$	Piercova povezava
$f_2 = \bar{x}_1 \, x_2$	$\overline{x_1 \rightarrow x_2}$	negacija implikacije
$f_3 = \bar{x}_1$	$\bar{x}_1$	negacija x_1
$f_4 = x_1 \, \bar{x}_2$	$\overline{x_2 \rightarrow x_1}$	negacija implikacije
$f_5 = \bar{x}_2$	$\bar{x}_2$	negacija x_2
$f_6 = x_1 \, \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \, x_2$	$x_1 \nabla x_2$	seštevanje po modulu 2
$f_7 = \overline{x_1 \, x_2}$	$x_1 \uparrow x_2$	Shefferjeva povezava

Logične funkcije (nad.)

$f_8 = x_1\, x_2$	$x_1\, x_2$	koniunkcija
$f_9 = x_1\, x_2 \vee \bar{x}_1\, \bar{x}_2$	$x_1 \equiv x_2$	ekvivalenca
$f_{10} = x_2$	x_2	spremenljivka x_2
$f_{11} = \bar{x}_1 \vee x_2$	$x_1 \rightarrow x_2$	implikacija
$f_{12} = x_1$	x_1	spremenljivka x_1
$f_{13} = x_1 \vee \bar{x}_2$	$x_2 \rightarrow x_1$	implikacija
$f_{14} = x_1 \vee x_2$	$x_1 \vee x_2$	disjunkcija
$f_{15} = 1$		preklopna konstanta 1

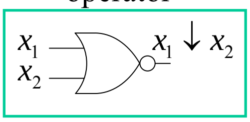
Logični simboli

Shefferjev operator



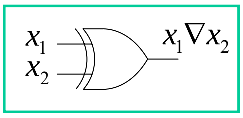
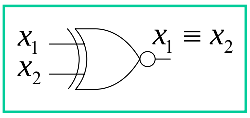
x_1, x_2	$f(x_1, x_2)$
0 0	1
0 1	1
1 0	1
1 1	0

Pirceov operator



x_1, x_2	$f(x_1, x_2)$
0 0	1
0 1	0
1 0	0
1 1	0

Logični simboli

Vsota po modulu 2	Ekvivalenca
	

Vsota po modulu 2:

x_1, x_2	$f(x_1, x_2)$
0 0	0
0 1	1
1 0	1
1 1	0

Ekvivalenca:

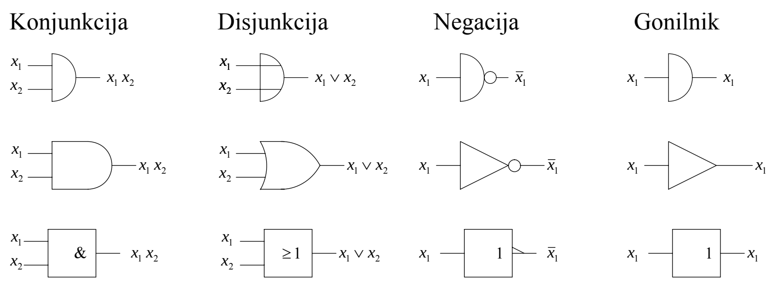
x_1, x_2	$f(x_1, x_2)$
0 0	1
0 1	0
1 0	0
1 1	1

Različni standardi

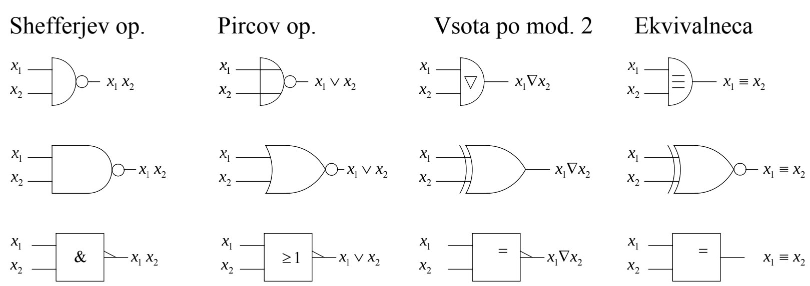
- Obstaja vrsta simbolov za logična vezja
  - standarde za simbole so postavljale razne organizacije
  - nekatera podjetja so postavljala svoje standarde, ki so najpogosteje kombinacija standardov
  - na predavanjih bomo uporabljali standard, ki je uporabljen v učbeniku

Različni standardi (nad.)

- Primeri različnih standardov



Različni standardi (nad.)



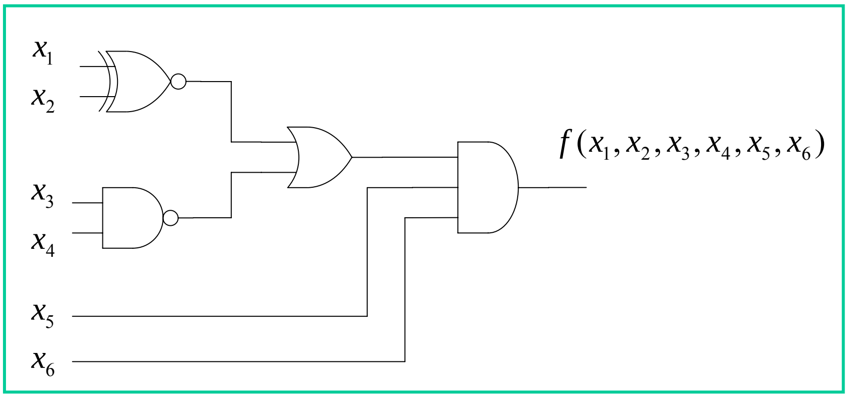
Logične sheme

- V logičnih shemah je preklopna funkcija predstavljena na grafični način
- Logične sheme so osnova za realizacijo preklopne funkcije
- Logične sheme poleg logičnih simbolov vsebujejo še dodatne informacije, ki so potrebne za fizično realizacijo (številke priključkov na integriranem vezju, oznako integriranega vezja, ...)

N. Zimic 3-39

Logične sheme (nad.)

- Primer: $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = ((x_1 \equiv x_2) \vee \overline{(x_3\, x_4)})\, x_5\, x_6$



N. Zimic 3-40

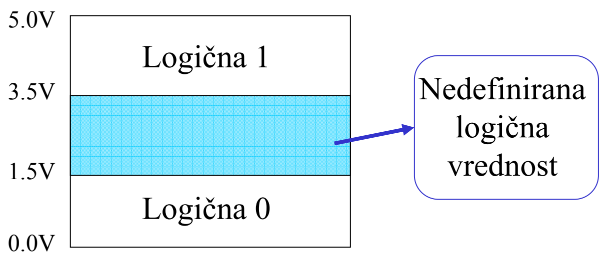
Realizacija preklopnih funkcij

- Preklopne funkcije realiziramo z elektronskimi vezji. Najpogosteje so to integrirana vezja.
- Pri realizaciji logično 0 in 1 običajno predstavimo z različnima nivojema eletrične napetosti.

N. Zimic 3-41

Realizacija preklopnih funkcij (nad.)

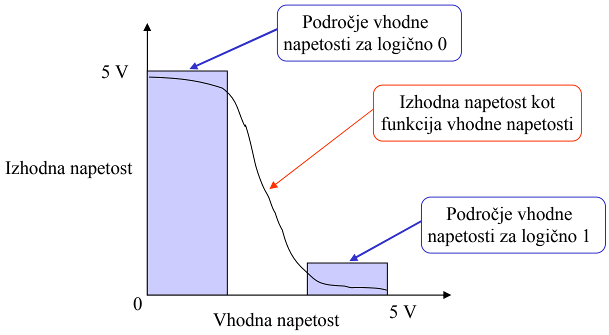
- Primer električnih nivojev za integrirana vezja v tehnologiji CMOS.



N. Zimic 3-42

Realizacija preklopnih funkcij (nad.)

- Primer negatorja

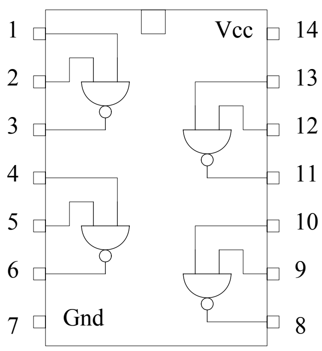


N. Zimic 3-43

Integrirana vezja

- Logični operatorji so realizirani v integriranih vezjih. Primer takega vezja je prikazan na sliki:

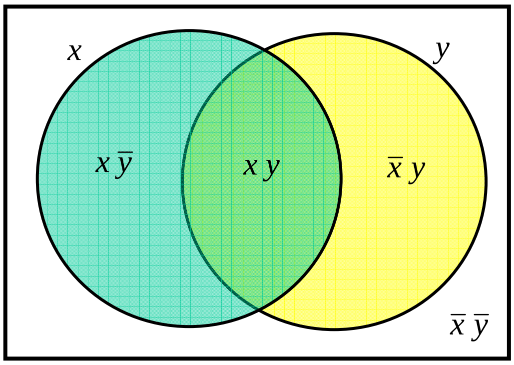
Primer integriranega vezja 74LS00. Številke označujejo številko priključka. Priključke štejemo v obratni smeri urnega kazalca. Priključka št. 7 in 14 sta namenjena za napajanje integriranega vezja.



N. Zimic 3-44

Vennovi diagrami

- Grafični prikaz relacije med spremenljivkami



Vennovi diagrami

- Krog v Venovih diagramih omejuje spremenljivko. V prejšnjem primeru omejuje spremenljivko x oziroma y.
- Presek krivulj in tudi zunanjost krogov tvorijo funkcije:

$x\,y,\ x\,\bar{y},\ \bar{x}\,y,\ \bar{x}\,\bar{y}$

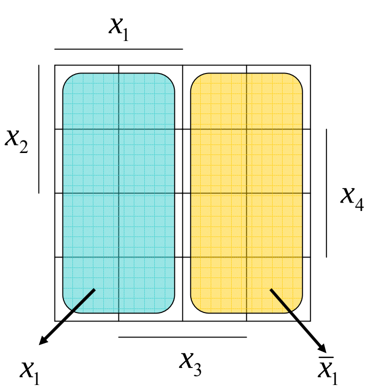
Veitchev diagram

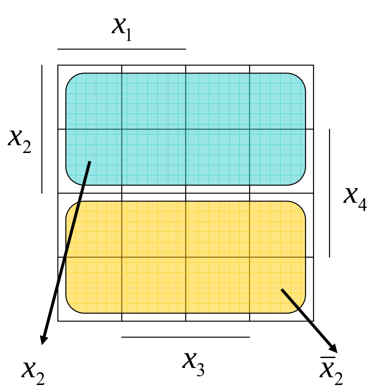
- Veitchev diagram se uporablja za zapis funkcij
- Obsega 2^n polj, kjer je n število neodvisnih spremenljivk
- Posebno primeren je pri minimizaciji logičnih funkcij
- Veitchev diagram izhaja iz Vennovih diagramov
- Na podoben način lahko zapišemo funkcijo tudi s pomočjo Karnaugovih diagramov

N. Zimic 3-47

Veitchev diagram (nad.)

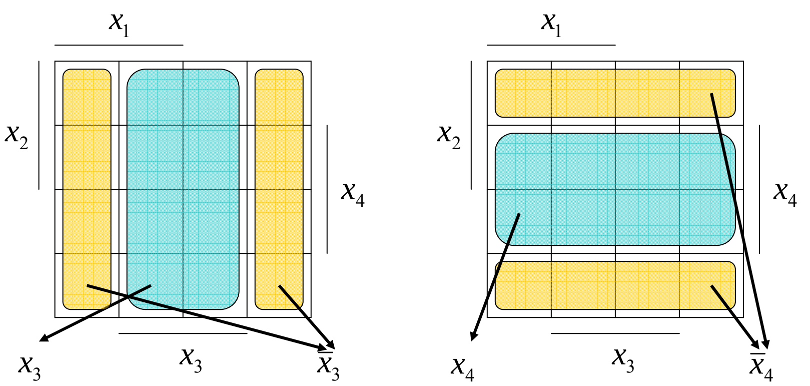
- Področja, ki jih pokriva neodvisna spremenljivka



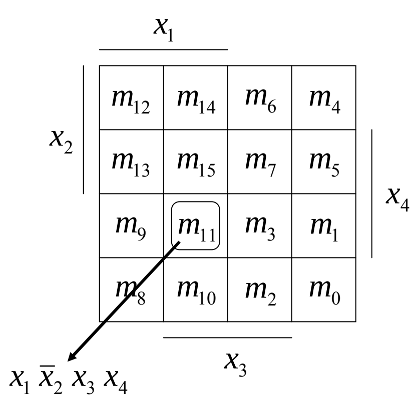


N. Zimic 3-48

Veitchev diagram (nad.)



Veitchev diagram (nad.)

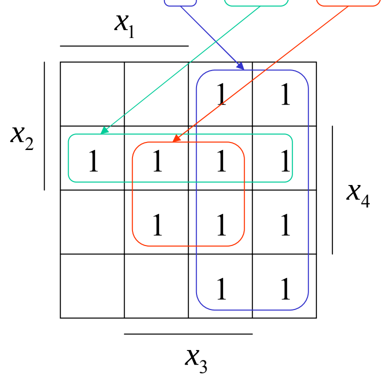


- Presečišče posameznih spremenljivk določa funkcijo polja.
- Vsako polje predstavlja minterem
- Na sliki je prikazan enajsti minterem

Veitchev diagram (nad.)

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \vee(0,1,2,3,4,5,6,7,11,13,15)$

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \boxed{\overline{x}_1} \vee \boxed{x_2\, x_4} \vee \boxed{x_3\, x_4}$



•V polja vpisujemo funkcijske vrednosti pri posameznem mintermu

•Vpisujemo samo enice

Veitchev diagram (nad.)

- Veitchev diagram za 1, 2 in 3 neodvisne spremenljivke

x_1	m_1
	m_0

	x_1	
x_2	m_3	m_1
	m_2	m_0

	x_1	x_1		
x_2	m_6	m_7	m_3	m_2
	m_4	m_5	m_1	m_0
		x_3	x_3	

Veitchev diagram (nad.)

- Veitchev diagram za 5 neodvisnih spremenljivk

x_5

x_1 x_1

x_2 x_4

m_{25}	m_{29}	m_{13}	m_9	m_{24}	m_{28}	m_{12}	m_8
m_{27}	m_{31}	m_{15}	m_{11}	m_{26}	m_{30}	m_{14}	m_{10}
m_{19}	$\boxed{m_{23}}$	m_7	m_3	m_{18}	m_{22}	m_6	m_2
m_{17}	m_{21}	m_5	m_1	m_{16}	m_{20}	m_4	m_0

$x_1\,\bar{x}_2\,x_3\,x_4\,x_5$

x_3 x_3

Ločenje

- Ločenje je poznano tudi kot Shanonov teorem

$$f(x_1,x_2,x_3,..,x_n)=f(0,x_2,x_3,..,x_n)\bar{x}_1 \vee f(1,x_2,x_3,..,x_n)x_1$$

$$f(x_1,x_2,x_3,..,x_n)=(f(0,x_2,x_3,..,x_n)\vee x_1)(f(1,x_2,x_3,..,x_n)\vee \bar{x}_1)$$

- Funkciji, ki sodelujeta pri ločenju imenujemo funkcijski ostanek

$$f_0(x_2,x_3,..,x_n)=f(0,x_2,x_3,..,x_n)$$
$$f_1(x_2,x_3,..,x_n)=f(1,x_2,x_3,..,x_n)$$

Ločenje (nad.)

- Primer ločenja:

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1\nabla x_2)\vee x_1x_2x_3$$

$$f(0,x_2,x_3)=(0\nabla x_2)\vee 0x_2x_3$$
$$f(1,x_2,x_3)=(1\nabla x_2)\vee 1x_2x_3$$

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3) &= f(0,x_2,x_3)\overline{x}_1\vee f(1,x_2,x_3)x_1 = \\ &= \left((0\nabla x_2)\vee 0x_2x_3\right)\overline{x}_1\vee\left((1\nabla x_2)\vee 1x_2x_3\right)x_1 = \\ &= (x_2)\overline{x}_1\vee(\overline{x}_2\vee x_2x_3)x_1 \end{aligned}$$

Ločenje (nad.)

- Postopek ločenja nad vsemi neodvisnimi spremenljivkami privede do PDNO ali PKNO.
- Primer za PDNO:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3,...,x_n) &= f(0,x_2,x_3,...,x_n)\overline{x}_1\vee f(1,x_2,x_3,...,x_n)x_1 \\ &= (f(0,0,x_3,...,x_n)\overline{x}_2\vee f(0,1,x_3,...,x_n)x_2)\overline{x}_1\vee \\ &\vee(f(1,0,x_3,...,x_n)\overline{x}_2\vee f(1,1,x_3,...,x_n)x_2)x_1 \\ &= \overline{x}_1\overline{x}_2...\overline{x}_n\, f(0,0,...,0)\vee\overline{x}_1\overline{x}_2...x_n\, f(0,0,...,1)\vee \\ &\vee...\vee x_1x_2...x_n\, f(1,1,...,1) \\ &= m_0\, f_0\vee m_1\, f_1\vee...\vee m_{2^n-1}\, f_{2^n-1} \end{aligned}$$

Ločenje (nad.)

- Primer za PKNO

$$f(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = (f(0, x_2, x_3, ..., x_n) \vee x_1)(f(1, x_2, x_3, ..., x_n) \vee \overline{x}_1)$$

$$= ((f(0,0, x_3, ..., x_n) \vee x_2)(f(0,1, x_3, ..., x_n)\overline{x}_2)) \vee x_1) \cdot$$
$$\cdot ((f(1,0, x_3, ..., x_n) \vee x_2)(f(1,1, x_3, ..., x_n)\overline{x}_2)) \vee \overline{x}_1)$$

$$= (x_1 \vee x_2 \vee ... \vee x_n \vee f(0,0,...,0)) \cdot$$
$$\cdot \ (x_1 \vee x_2 \vee ... \vee \overline{x}_n \vee f(0,0,...,1)) \cdot$$
$$\cdot \ (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee ... \vee \overline{x}_n \vee f(1,1,...,1))$$

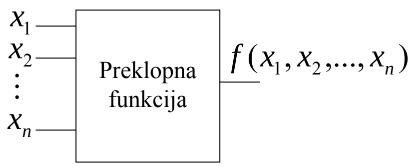
$$= (M_{2^n-1} \vee f_0)(M_{2^n-2} \vee f_1) \cdot ... \cdot (M_0 \vee f_{2^n-1})$$

Dekompozicija preklopne funkcije

- Dekompozicija preklopne funkcije je postopek s katerim preklopno funkcijo razdelimo na dva dela.
- Na tak način funkcijo realiziramo z manjšim številom elementov in priključkov.
- Dekompozicija preklopne funkcije ni vedno možna.

Dekompozicija preklopne funkcije (nad.)

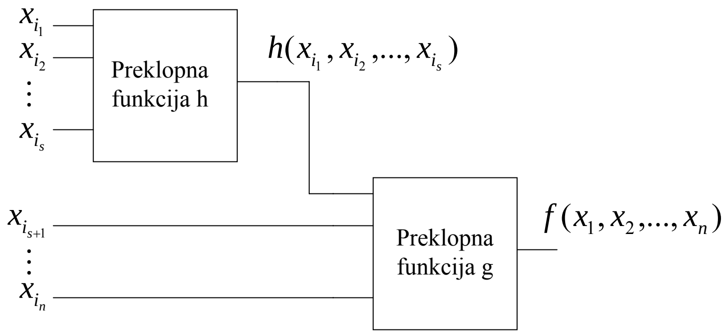
- Grafična predstavitev preklopne funkcije



N. Zimic 3-59

Dekompozicija preklopne funkcije (nad.)

- Grafična predstavitev dekompozicije preklopne funkcije



N. Zimic 3-60

Dekompozicija preklopne funkcije (nad.)

- Funkcija ima dekompozitno značilnost, če velja:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = g(h(x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_s}), x_{i_{s+1}}, ..., x_{i_n})$$

$$1 \le s \le n$$

$$\{x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_s}\} \cap \{x_{i_{s+1}}, x_{i_{s+2}}, ..., x_{i_n}\} = \varnothing$$

$$\{x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_s}\} \cup \{x_{i_{s+1}}, x_{i_{s+2}}, ..., x_{i_n}\} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$$

Preklopna diferenca

- Kdaj je funkcija odvisna od spremenljivke?

$f(x_1, x_2, ..., 0, ..., x_n)$ - funkcija, ko je x_i enak 0
$f(x_1, x_2, ..., 1 ..., x_n)$ - funkcija, ko je x_i enak 1

- Funcija ni odvisna od spremeljivke x_i, če velja:

$$\boxed{f(x_1, x_2, ..., 0, ..., x_n) = f(x_1, x_2, ..., 1 ..., x_n)}$$

Preklopna diferenca (nad.)

- Preklopna (boolova) diferenca podaja odvisnost funkcije od vhodne spremenljivke

$$\frac{df(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{dx_i} = \begin{cases} 0, & \text{funkcija ni odvisna od spremenljivke } \mathrm{x}_i \\ 1, & \text{funkcija je odvisna od spremenljivke } \mathrm{x}_i \\ g, & \text{funkcija je odvisna od } \mathrm{x}_i \text{ pod pogojem } g \end{cases}$$

$$\frac{df(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{dx_i} = f(x_1, x_2, \ldots, 0, \ldots, x_n) \nabla f(x_1, x_2, \ldots, 1 \ldots, x_n)$$

N. Zimic 3-63

Preklopna diferenca (nad.)

- Primer: $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x}_1 \vee x_2\, x_4 \vee x_3\, x_4$

$$\frac{df(x_1, x_2, x_3, x_4)}{dx_1} = (\overline{0} \vee x_2\, x_4 \vee x_3\, x_4) \nabla (\overline{1} \vee x_2\, x_4 \vee x_3\, x_4) =$$

$$= 1 \nabla (x_2\, x_4 \vee x_3\, x_4) = \overline{x_2\, x_4 \vee x_3\, x_4}$$

- Odvisnost lahko določimo tudi z minimizacijo preklopne funkcije. Če funkcija ni odvisna od vhodne spremenljivke, bo le ta pri minimizaciji odpadla.

N. Zimic 3-64

Funkcijsko poln sistem

Funkcijsko poln sistem

- Funkcijsko poln sistem je množica funkcij, s katerimi lahko realiziramo katerokoli preklopno funkcijo
- Funkcijsko poln sistem, ki izhaja iz postulatov, predstavljajo:
  - konjunkcija, disjunkcija, negacija
- Funkcijsko polnost lahko ugotovimo s prevedbo nabora funkcij na znan funkcijsko poln sistem

Funkcijsko poln sist. (nad.)

- Primer preverjanja funkcijske polnosti sistema:

nabor	$x_1 \vee x_2$	$x_1\, x_2$	$\overline{x}$
$\vee, \&, \overline{\ }$	$x_1 \vee x_2$	$x_1\, x_2$	$\overline{x}$
$\vee, \overline{\ }$	$x_1 \vee x_2$	$\overline{\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2}$	$\overline{x}$
$\&, \overline{\ }$	$\overline{\overline{x}_1\, \overline{x}_2}$	$x_1\, x_2$	$\overline{x}$
$\downarrow$	$(x_1 \downarrow x_2) \downarrow (x_1 \downarrow x_2)$	$(x_1 \downarrow x_1) \downarrow (x_2 \downarrow x_2)$	$x \downarrow x$
$\uparrow$	$(x_1 \uparrow x_1) \uparrow (x_2 \uparrow x_2)$	$(x_1 \uparrow x_2) \uparrow (x_1 \uparrow x_2)$	$x \uparrow x$

N. Zimic 4-3

Funkcijsko polni sist. (nad.)

- Primer preverjanja funkcijske polnosti sistema:

nabor	$x_1 \vee x_2$	$x_1\, x_2$	$\overline{x}$
$\rightarrow, 0$	$(x_1 \rightarrow 0) \rightarrow x_2$	$(x_1 \rightarrow (x_2 \rightarrow 0) \rightarrow 0$	$x \rightarrow 0$
$\equiv, \vee, 0$	$x_1 \vee x_2$	$((x_1 \equiv 0) \vee (x_2 \equiv 0)) \equiv 0$	$x \equiv 0$

N. Zimic 4-4

Zaprti razredi

- Množica *M* je podmnožica množice funkcij:

  $M \subset P_2$

- Funkcija $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je element množice M:

  $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in M$

- Če s funkcijo *f* ne moremo realizirati nobene funkcije, ki ne bi bila vsebovana v množici M, je množica M zaprt razred.

Zaprti razredi (nad.)

- Na razpolago imamo funkciji konjunkcijo in disjunkcijo:

  $$f(x_1, x_2) = x_1 x_2 \quad \in M$$
  $$g(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2 \in M$$

- Z omenjenim naborom ne moremo realizirati funkcije:

  $$\boxed{h(0,0) = 1}$$

Zaprti razredi (nad.)

- Obstaja 5 osnovnih zaprtih razredov:
  - T_0 - razred ohranjanja ničle
  - T_1 - razred ohranjanja enice
  - S - razred sebidualnih funkcij
  - L - razred linearnih funkcij
  - M - razred popolnoma monotonih funkcij

- Množica P_2 je tudi zaprt razred, ki je hkrati tudi univerzalna množica

N. Zimic 4-7

Značilnost zaprtih razredov

- T_0 -razred ohranjanja konstante 0

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \in T_0 \quad : \quad f(0,0,...,0) = 0$$

- T_1 -razred ohranjanja konstante 1

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \in T_1 \quad : \quad f(1,1,...,1) = 1$$

- S - razred sebidualnih funkcij

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \in S \quad : \quad \bar{f}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

- L - razred linearnih funkcij

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \in L \quad : \quad f(x_1, x_2, ..., x_n) = a_0 \nabla a_1 x_1 \nabla a_2 x_2 \nabla ... \nabla a_n x_n$$

N. Zimic 4-8

Značilnost zaprtih razredov (nad.)

- M - razred popolnoma monotonih funkcij

  $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in M \quad : \quad \tilde{w}_i \leq \tilde{w}_j \rightarrow f(\tilde{w}_i) \leq f(\tilde{w}_j)$

  – vektorje primerjamo po bitnih mestih. Če se vektor razlikuje v več kot dveh bitnih mestih in pri tem prihaja do protislovja, potem relacije ne moremo določiti!

  $(0,0,0,0) < (0,0,1,0)$

  $(0,0,1,1) < (0,1,1,1)$

  $(1,1,0,0) \quad (0,0,1,0)$ primerjava ni možna!

Zaprti razredi

- Funkcijski nabor je funkcijsko poln, če funkcije odpirajo zaprte razrede:

  $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$

  1) $f_i \notin T_0 \quad f_i \in F$
  2) $f_i \notin T_1 \quad f_i \in F$
  3) $f_i \notin S \quad f_i \in F$
  4) $f_i \notin L \quad f_i \in F$
  5) $f_i \notin M \quad f_i \in F$

Zaprti razredi (nad.)

- Preverjanje funkcijske polnosti za nabor funkcij:

  $F = \{\vee, \rightarrow, 1\}$

  - Razred T_0

    $0 \vee 0 = 0$ $\quad 0 \rightarrow 0 \neq 0$ $\quad 1 \neq 0$
  - Razred T_1

    $1 \vee 1 = 1$ $\quad 1 \rightarrow 1 = 1$ $\quad 1 = 1$
  - Razred S

    $x_1 \vee x_2 \neq \overline{\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2}$ $\quad x_1 \rightarrow x_2 \neq \overline{\overline{x}_1 \rightarrow \overline{x}_2}$ $\quad 1 \neq \overline{1}$

Zaprti razredi (nad.)

- Razred L

  $x_1 \vee x_2 \neq a_0 \nabla a_1 x_1 \nabla a_2 x_2$

  $x_1 \rightarrow x_2 \neq a_0 \nabla a_1 x_1 \nabla a_2 x_2$

  $1 = a_0$
- Razred M

  $x_1 \vee x_2 = monotona$

  $x_1 \rightarrow x_2 \neq monotona$

  $1 = monotona$

Zaprti razredi (nad.)

	T_0	T_1	S	L	M
$x_1 \vee x_2$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$
$x_1 \rightarrow x_2$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
1	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$

- Nabor funkcij $F = \{\vee, \rightarrow, 1\}$ ni funkcijsko poln sistem, ker ne odpira razreda T_1

Shefferjev funkcijsko poln sistem

- Funkcijo lahko podamo v popolni Shefferjevi normalni obliki PSNO:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathop{\uparrow}_{i=0}^{2^n-1} (\ f_i \uparrow s_i)$$

- Kjer je s_i Shefferjev minterm:

$$s_i = x_1^{w_{1i}} \uparrow x_2^{w_{2i}} \uparrow \ldots \uparrow x_n^{w_{ni}} \qquad i = 0,1,\ldots,2^n - 1$$

Shefferjev funkcijsko poln sistem (nad.)

- Primer:

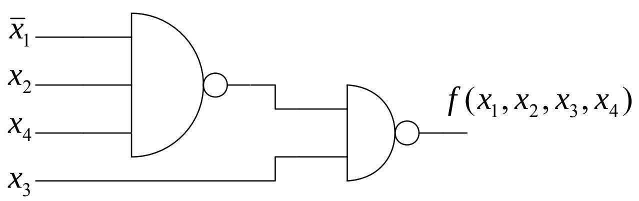
$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x}_3 \vee \overline{x}_1\, x_2\, x_4$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_3 \uparrow \overline{(\overline{x}_1\, x_2\, x_4)}$$

$$= x_3 \uparrow (\overline{x}_1 \uparrow x_2 \uparrow x_4)$$

Shefferjev funkcijsko poln sistem (nad.)

- Shema vezja za prejšnji primer:



Pierceov funkcijsko poln sistem

- Funkcijo lahko podamo v popolni Piercevi normalni obliki PPNO:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathop{\downarrow}_{i=0}^{2^n-1} (\ f_i \downarrow P_{2^n-1-i})$$

- Kjer je P_{2^n-1-i} Piercev maksterm:

$$P_{2^n-1-i} = x_1^{\overline{w}_{1i}} \downarrow x_2^{\overline{w}_{2i}} \downarrow \ldots \downarrow x_n^{\overline{w}_{ni}} \qquad i = 0,1,\ldots,2^n-1$$

Pierceov funkcijsko poln sistem (nad.)

- Primer:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1\, x_2\, x_4}$$

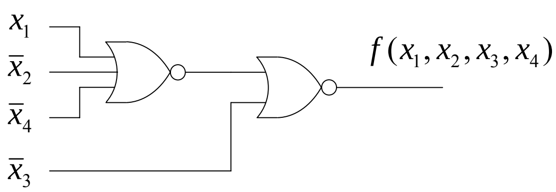
$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x}_3 \downarrow (\overline{x}_1\, x_2\, x_4)$$

$$= \overline{x}_3 \downarrow \overline{(x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_4)}$$

$$= \overline{x}_3 \downarrow (x_1 \downarrow \overline{x}_2 \downarrow \overline{x}_4)$$

Pierceov funkcijsko poln sistem (nad.)

- Shema vezja za prejšnji primer (brez negacije na izhodu):



N. Zimic 4-19

MINIMIZACIJA PREKLOPNIH FUNKCIJ

Glavni vsebovalnik

- Glavni vsebovalnik je konjunktivni izraz, ki je disjuktivno vsebovan v opazovani preklopni funkciji tako, da ne obstaja noben krajši konjunktivni izraz.
- Za minimalno disjunktivno normalno obliko moramo med glavnimi vsebovalniki izbrati samo tiste, ki so potrebni. Potrebni vsebovalniki vsebujejo vse minterme, ki sestavljajo preklopno funkcijo.

Sosednost

- Konjunkciji sta sosednji, če se razlikujeta samo po eni negaciji in imata isti nabor spremenljivk.
- Ista definicija velja tudi za minterme

- Primer sosednjih konjunkcij:

$$x_1\,\overline{x}_2\,\boxed{x_3}\,\overline{x}_4 \qquad\qquad \overline{x}_1\,\boxed{\overline{x}_2}\,\overline{x}_4\,\overline{x}_5\,\overline{x}_6$$

$$x_1\,\overline{x}_2\,\boxed{\overline{x}_3}\,\overline{x}_4 \qquad\qquad \overline{x}_1\,\boxed{x_2}\,\overline{x}_4\,\overline{x}_5\,\overline{x}_6$$

Sosednost (nad.)

- Sosednje konjunkcije lahko v preklopni funkciji opustimo na osnovi postulata P5 in P5*

$$\boxed{\begin{aligned}\overline{x}_1\,\overline{x}_2\,\overline{x}_4\,\overline{x}_5\,\overline{x}_6 \vee \overline{x}_1\,x_2\,\overline{x}_4\,\overline{x}_5\,\overline{x}_6 &= (\overline{x}_2 \vee x_2)\,\overline{x}_1\,\overline{x}_4\,\overline{x}_5\,\overline{x}_6 = \\ &= \overline{x}_1\,\overline{x}_4\,\overline{x}_5\,\overline{x}_6\end{aligned}}$$

- Večina postopkov za minimizacijo preklopnih funkcij temelji na sosednosti

Quinova metoda minimizacije

- Postopek
  - funkcijo zapišemo z mintermi
  - poiščemo sosednje konjunkcije
  - postopek iskanja konjunkcij ponavljamo, dokler le te obstajajo
  - poiščemo potrebne glavne vsebovalnike
  - iz potrebnih glavnih vsebovalnikov sestavimo minimalno obliko funkcije

Quinova metoda minimizacije (nad.)

- Primer: $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \vee(0,1,2,8,10,11,14,15)$

$n=4$	$n=3$	$n=2$
$\cancel{\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4}$	$\boxed{\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3}$	$\boxed{\bar{x}_2 \bar{x}_4}$
$\cancel{\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4}$	$\cancel{\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4}$	$\boxed{x_1 x_3}$
$\cancel{\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4}$	$\cancel{\bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4}$	
$\cancel{x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4}$	$\cancel{\bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4}$	
$\cancel{x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4}$	$\cancel{x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4}$	
$\cancel{x_1 \bar{x}_2 x_3 x_4}$	$\cancel{x_1 \bar{x}_2 x_3}$	
$\cancel{x_1 x_2 x_3 \bar{x}_4}$	$\cancel{x_1 x_3 \bar{x}_4}$	
$\cancel{x_1 x_2 x_3 x_4}$	$\cancel{x_1 x_3 x_4}$	
	$\cancel{x_1 x_2 x_3}$	

Na osnovi sosednosti iščemo glavne vsebovalnike

Quinova metoda minimizacije (nad.)

- Iskanje potrebnih glavnih vsebovalnikov

	m_0	m_1	m_2	m_8	m_{10}	m_{11}	m_{14}	m_{15}
$x_1\,x_3$					$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
$\bar{x}_2\,\bar{x}_4$	$\in$		$\in$	$\in$	$\in$			
$\bar{x}_1\,\bar{x}_2\,\bar{x}_3$	$\in$	$\in$						

- Iz potrebnih vsebovalnikov sestavimo minimalno disjunktivno normalno obliko

$$\boxed{f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1\,x_3 \vee \bar{x}_2\,\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1\,\bar{x}_2\,\bar{x}_3}$$

Quinova metoda minimizacije (nad.)

- Primer: $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \vee(1,4,6,7,8,9,10,11,15)$

$n=4$	$n=3$	$n=2$
$\cancel{\bar{x}_1\,\bar{x}_2\,\bar{x}_3\,x_4}$	$\boxed{\bar{x}_2\,\bar{x}_3\,x_4}$	$\boxed{x_1\,\bar{x}_2}$
$\cancel{\bar{x}_1\,x_2\,\bar{x}_3\,\bar{x}_4}$	$\boxed{\bar{x}_1\,x_2\,\bar{x}_4}$	
$\cancel{\bar{x}_1\,x_2\,x_3\,\bar{x}_4}$	$\boxed{\bar{x}_1\,x_2\,x_3}$	
$\cancel{\bar{x}_1\,x_2\,x_3\,x_4}$	$\boxed{x_1\,x_3\,x_4}$	
$\cancel{x_1\,\bar{x}_2\,\bar{x}_3\,\bar{x}_4}$	$\boxed{x_2\,x_3\,x_4}$	
$\cancel{x_1\,\bar{x}_2\,\bar{x}_3\,x_4}$	$\cancel{x_1\,\bar{x}_2\,\bar{x}_3}$	
$\cancel{x_1\,\bar{x}_2\,x_3\,\bar{x}_4}$	$\cancel{x_1\,\bar{x}_2\,\bar{x}_4}$	
$\cancel{x_1\,\bar{x}_2\,x_3\,x_4}$	$\cancel{x_1\,\bar{x}_2\,x_4}$	
$\cancel{x_1\,x_2\,x_3\,x_4}$	$\cancel{x_1\,\bar{x}_2\,x_3}$	

Quinova metoda minimizacije (nad.)

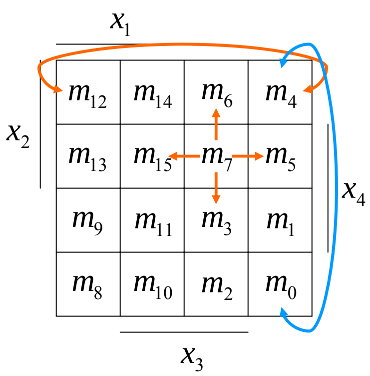
- Iskanje potrebnih glavnih vsebovalnikov

	m_1	m_4	m_6	m_7	m_8	m_9	m_{10}	m_{11}	m_{15}
$x_1\,\overline{x}_2$					$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	
$\overline{x}_2\,\overline{x}_3\,x_4$	$\in$					$\in$			
$\overline{x}_1\,x_2\,\overline{x}_4$		$\in$	$\in$						
$\overline{x}_1\,x_2\,x_3$			$\in$	$\in$					
$x_1\,x_3\,x_4$								$\in$	$\in$
$x_2\,x_3\,x_4$				$\in$					$\in$

$$\boxed{f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1\,\overline{x}_2 \vee \overline{x}_2\,\overline{x}_3\,x_4 \vee \overline{x}_1\,x_2\,\overline{x}_4 \vee x_2\,x_3\,x_4}$$

Veitchev postopek minimizacije

- Sosednji mintermi v veitchevem diagramu



- sosednji mintermi so kar sosedi v veitchevem diagramu
- mintermi na robu diagrama imajo sosede tudi na drugi strani

Veitchev postopek minimizacije (nad.)

- Sosednje konjunkcije v veitchevem diagramu

	x_1	x_1			
x_2	m_{12}	m_{14}	m_6	m_4	
x_2	m_{13}	m_{15}	m_7	m_5	x_4
	m_9	m_{11}	m_3	m_1	x_4
	m_8	m_{10}	m_2	m_0	
		x_3	x_3		

N. Zimic 5-11

Veitchev postopek minimizacije (nad.)

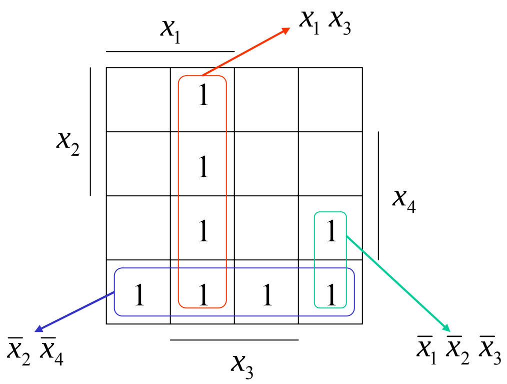
- Sosednje konjunkcije v veitchovem diagramu

	x_5	x_5	x_5	x_5					
	x_1	x_1			x_1	x_1			
x_2	m_{25}	m_{29}	m_{13}	m_9	m_{24}	m_{28}	m_{12}	m_8	
x_2	m_{27}	m_{31}	m_{15}	m_{11}	m_{26}	m_{30}	m_{14}	m_{10}	x_4
	m_{19}	m_{23}	m_7	m_3	m_{18}	m_{22}	m_6	m_2	x_4
	m_{17}	m_{21}	m_5	m_1	m_{16}	m_{20}	m_4	m_0	
		x_3	x_3			x_3	x_3		

N. Zimic 5-12

Veitchev postopek minimizacije (nad.)

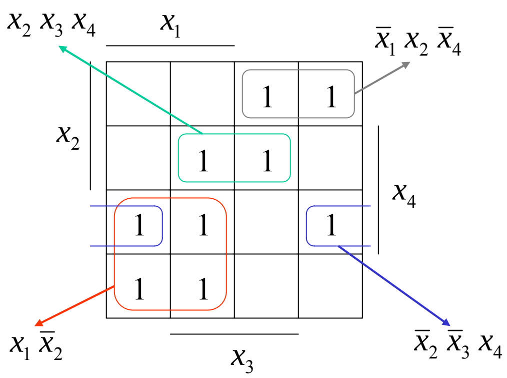
- Primer: $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \vee(0,1,2,8,10,11,14,15)$



$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) =$$
$$= \bar{x}_1\, \bar{x}_2\, \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2\, \bar{x}_4 \vee x_1\, x_3$$

Veitchev postopek minimizacije (nad.)

- Primer: $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \vee(1,4,6,7,8,9,10,11,15)$



$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) =$$
$$= x_1\, \bar{x}_2 \vee \bar{x}_2\, \bar{x}_3\, x_4 \vee$$
$$\vee\, x_2\, x_3\, x_4 \vee \bar{x}_1\, x_2\, \bar{x}_4$$

Minimalna konjukntivna normalna oblika

- Do MKNO pridemo preko MDNO:
  - funkcijo negiramo
  - tako dobljeno funkcijo minimiziramo (MDNO)
  - rezultat ponovno negiramo
  - s pomočjo De Morganovega pravila jo pretvorimo v MKNO

Minimalna konjukntivna normalna oblika (nad.)

- Primer: $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \vee(0,1,2,8,10,11,14,15)$

$f(x_1,x_2,x_3,x_4):$

x_1 (columns 1–2), x_2 (rows 1–2), x_4 (rows 2–3), x_3 (columns 2–3)

	1		
	1		
	1		1
1	1	1	1

$\overline{f(x_1,x_2,x_3,x_4)}:$

x_1 (columns 1–2), x_2 (rows 1–2), x_4 (rows 2–3), x_3 (columns 2–3)

1		1	1
1		1	1
1		1	

Minimalna konjukntivna normalna oblika (nad.)

- Negirana funkcija v MDNO:

$$\overline{f(x_1, x_2, x_3, x_4)} = \bar{x}_1\, x_2 \vee x_2\, \bar{x}_3 \vee x_1\, \bar{x}_3\, x_4 \vee \bar{x}_1\, x_3\, x_4$$

- S pomočjo De Morganovega izreka pretvorimo v MKNO:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_3 \vee \bar{x}_4)(x_1 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)$$

Minimalna konjukntivna normalna oblika (nad.)

- Primer: $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \vee(1,4,6,7,8,9,10,11,15)$

$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$:

x_1, x_2, x_3, x_4

		1	1
	1	1	
1	1		1
1	1		

$\overline{f(x_1, x_2, x_3, x_4)}$:

x_1, x_2, x_3, x_4

1	1		
1			1
		1	
		1	1

Minimalna konjukntivna normalna oblika (nad.)

- Negirana funkcija v MDNO:

$$\overline{f(x_1,x_2,x_3,x_4)} = x_1\, x_2\, \overline{x}_4 \vee x_2\, \overline{x}_3\, x_4 \vee \overline{x}_1\, \overline{x}_2\, x_3 \vee \overline{x}_1\, \overline{x}_2\, \overline{x}_4$$

- S pomočjo De Morganovega izreka pretvorimo v MKNO:

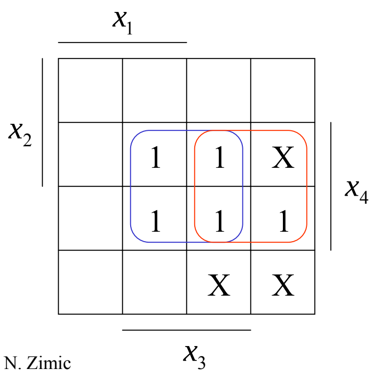
$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_4)(\overline{x}_2 \vee x_3 \vee \overline{x}_4)\cdot$$
$$\cdot(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3)(x_1 \vee x_2 \vee x_4)$$

Minimizacija nepopolnih funkcij

- Funkcija je lahko le delno definirana
- Pri nekaterih mintermih funkcija ni določena
- To nedefiniranost lahko pri mimimizaciji upoštevamo kot enico ali ničlo, odvisno od tega, kaj pripelje do ugodnejše minimizacije
- V Veitchevem diagramu označimo nedefinirana polja s črko X

Minimizacija nepopolnih funkcij (nad.)

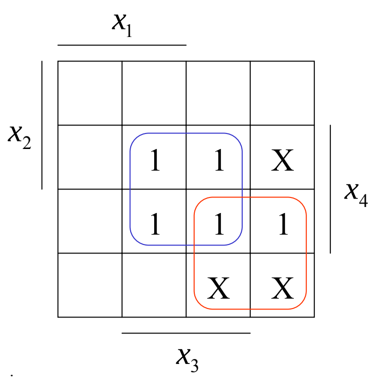
- Funkcija: $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \vee(1,3,7,11,15)$
- Nedefinirane vrednosti: $d(x_1, x_2, x_3, x_4) = \vee(0,2,5)$



$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_3\, x_4 \vee \bar{x}_1\, x_4$$

Minimizacija nepopolnih funkcij (nad.)

- Obstaja tudi druga popolnoma enakovredna rešitev:



$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_3\, x_4 \vee \bar{x}_1\, \bar{x}_2$$

Ostale pomembne preklopne funkcije

Variantnost preklopne funkcije

- Funkcija n neodvisnih vhodnih spremenljivk je invariantna na zamenjavo dveh spremenljivk, če velja:

$$\boxed{f(x_1, x_2, .., x_i, ..., x_j, ..., x_n) = f(x_1, x_2, .., x_j, ..., x_i, ..., x_n) \quad i \neq j}$$

- Pri zamenjavi dveh neodvisnih spremenljivk med seboj, se funkcijska vrednost ne spremeni.
- Zamenjavo (transpozicijo) formalno zapišemo:

$$\boxed{(i, j)\, f(x_1, x_2, ..., x_n) \qquad i \neq j}$$

Simetrične funkcije

- Funkcija je popolno simetrična, če je invariantna za vse zamenjave:

$$\boxed{(1,2)\,f,\,(1,3)\,f,\ldots,\,(1,n)\,f}$$

- Če je invariantna samo pri nekaterih zamenjavah, je funkcija delno simetrična
- Funkcija je popolnoma nesimetrična, če ne obstaja noben par spremenljivk, pri katerem bi bila funkcija invariantna

N. Zimic 6-3

Simetrične funkcije (nad.)

- Simetričnost opazujemo tudi pri negaciji vhodnih spremenljivk. Nabor vhodnih spremenljivk, z upoštevanjem negacije, je:

$$\boxed{\widetilde{X}^{\widetilde{W}_i} = \{x_1^{w_{1i}}, x_2^{w_{2i}}, \ldots, x_n^{w_{ni}}\}}$$

- Če je funkcija simetrična pri i-tem naboru, takšen nabor imenujemo i-ti simetrijski nabor neodvisnih spremenljivk.
- Vseh naborov je 2^n

N. Zimic 6-4

Simetrične funkcije (nad.)

- Pri ugotavljanju simetričnosti funkcije moramo preverjati invariantnost funkcije pri vseh naborih spremenljivk (negacijah spremenljivk). Funkcijo pri i-tem naboru spremenljivk zapišemo:

$$\boxed{f(x_1^{w_{1i}}, x_2^{w_{2i}}, \ldots, x_n^{w_{ni}})}$$

N. Zimic 6-5

Popolnoma simetrične funkcije

- Potreben in zadosten pogoj, da je preklopna funkcija popolnoma simetrična je, da obstaja množica simetrijskih števil A={...,a,...}, kjer je a med 0 in n. Če ima a vhodnih spremenljivk vrednost 1, potem mora biti vrednost funkcije tudi 1.
- Popolnoma simetrično funkcijo zapišemo:

$$\boxed{f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_A(x_1^{w_{1i}}, x_2^{w_{2i}}, \ldots, x_n^{w_{ni}}) = f_A(\widetilde{X}^{\widetilde{W}_i})}$$

N. Zimic 6-6

Popolnoma simetrične funkcije (nad.)

- Primer simetrične funkcije. Funkcija je po vrednosti 1, če sta nič ali dve vhodni spremenljivki po vrednosti 1

$$f_{\{0,2\}}(x_1, x_2, x_3) = \boxed{\bar{x}_1\,\bar{x}_2\,\bar{x}_3} \vee \boxed{x_1\,x_2\,\bar{x}_3} \vee \boxed{x_1\,\bar{x}_2\,x_3} \vee \boxed{\bar{x}_1\,x_2\,x_3}$$

nič spremenljivk po vrednosti ena

dve spremenljivki po vrednosti ena

Popolnoma simetrične funkcije (nad.)

- Primer (nad.)

$$f_{\{0,2\}}(x_1, x_2, x_3) =$$
$$= \bar{x}_1\,\bar{x}_2\,\bar{x}_3 \vee x_1\,x_2\,\bar{x}_3 \vee x_1\,\bar{x}_2\,x_3 \vee \bar{x}_1\,x_2\,x_3$$

	x_1	x_1		
x_2	1	0	1	0
	0	1	0	1
		x_3	x_3	

x_1, x_2, x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0 0 0	1
0 0 1	0
0 1 0	0
0 1 1	1
1 0 0	0
1 0 1	1
1 1 0	1
1 1 1	0

Popolnoma simetrične funkcije (nad.)

- Poleg možice A obstaja tudi dopolnilna možica, tako da velja

$$A \cup A' = U \qquad A \cap A' = \emptyset$$

$$U = \{0,1,\ldots,n\}$$

- Množica U vsebuje vsa števila od 0 do n, kjer je n število neodvisnih vhodnih spremenljivk
- Pri možici U velja:

$$f_U(\widetilde{X}^{\widetilde{W}_i}) = 1$$

Negacije pri simetričnih funkcijah

- Negacija simetrične funkcije je tudi simetrična funkcija:

$$B = C_M(A) = \overline{A} = \{a \mid a \in U \wedge a \notin A\}$$

$$\boxed{\overline{f_A}(x_1^{w_{1i}}, x_2^{w_{2i}}, \ldots, x_n^{w_{ni}}) = f_B(x_1^{w_{1i}}, x_2^{w_{2i}}, \ldots, x_n^{w_{ni}})}$$

- Negacija vhodnih spremenljivk:

$$\boxed{f_A(x_1^{\overline{w}_{1i}}, x_2^{\overline{w}_{2i}}, \ldots, x_n^{\overline{w}_{ni}}) = f_B(x_1^{w_{1i}}, x_2^{w_{2i}}, \ldots, x_n^{w_{ni}})}$$

$$B = \{b \mid b = n - a,\ a \in A\}$$

Negacije pri simetričnih funkcijah (nad.)

- Dualna funkcija je tudi simetrična funkcija:

$$\boxed{\overline{f_A}(x_1^{\overline{w}_{1i}}, x_2^{\overline{w}_{2i}}, \ldots, x_n^{\overline{w}_{ni}}) = f_B(x_1^{w_{1i}}, x_2^{w_{2i}}, \ldots, x_n^{w_{ni}})}$$

$$B = \{b \mid b = n - a,\ a \in \overline{A}\}$$

Negacije pri simetričnih funkcijah (nad.)

- Primeri:

$$f_{\{0,2\}}(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_1\,\overline{x}_2\,\overline{x}_3 \vee x_1\,x_2\,\overline{x}_3 \vee x_1\,\overline{x}_2\,x_3 \vee \overline{x}_1\,x_2\,x_3$$

$$U = \{0,1,2,3\} \qquad n = 3$$

$$\overline{f_{\{0,2\}}}(x_1, x_2, x_3) = f_{\{1,3\}}(x_1, x_2, x_3)$$

$$f_{\{0,2\}}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3) = f_{\{1,3\}}(x_1, x_2, x_3)$$

$$\overline{f_{\{0,2\}}}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3) = f_{\{0,2\}}(x_1, x_2, x_3)$$

Konjunkcija in disjunkcija simetričnih funkcij

- Disjunkcija ohranja simetričnost:

$$\boxed{f_C(x_1^{w_{1i}}, x_2^{w_{2i}}, \ldots, x_n^{w_{ni}}) = f_A(x_1^{w_{1i}}, x_2^{w_{2i}}, \ldots, x_n^{w_{ni}}) \vee f_B(x_1^{w_{1i}}, x_2^{w_{2i}}, \ldots, x_n^{w_{ni}})}$$

$$C = A \cup B$$

- Konjunkcija ohranja simetričnost:

$$\boxed{f_C(x_1^{w_{1i}}, x_2^{w_{2i}}, \ldots, x_n^{w_{ni}}) = f_A(x_1^{w_{1i}}, x_2^{w_{2i}}, \ldots, x_n^{w_{ni}})\ f_B(x_1^{w_{1i}}, x_2^{w_{2i}}, \ldots, x_n^{w_{ni}})}$$

$$C = A \cap B$$

N. Zimic 6-13

Konjunkcija in disjunkcija simetričnih funkcij (nad.)

- Primer:

$$f_{\{2\}}(x_1, x_2) = x_1\, x_2$$

$$f_{\{1\}}(x_1, x_2) = x_1\, \overline{x}_2 \vee \overline{x}_1\, x_2$$

- Disjunkcija ohranja simetričnost:

$$f_{\{1,2\}}(x_1, x_2) = f_{\{2\}}(x_1, x_2) \vee f_{\{1\}}(x_1, x_2)$$

$$f_{\{1,2\}}(x_1, x_2) = x_1\, \overline{x}_2 \vee \overline{x}_1\, x_2 \vee x_1\, x_2$$

N. Zimic 6-14

Konjunkcija in disjunkcija simetričnih funkcij (nad.)

- Primer:

$$f_{\{1\}}(x_1, x_2) = x_1\,\overline{x}_2 \vee \overline{x}_1\,x_2$$

$$f_{\{1,2\}}(x_1, x_2) = x_1\,\overline{x}_2 \vee \overline{x}_1\,x_2 \vee x_1\,x_2$$

- Konjunkcija ohranja simetričnost:

$$f_{\{1\}}(x_1, x_2) = f_{\{1\}}(x_1, x_2)\,f_{\{1,2\}}(x_1, x_2)$$
$$f_{\{1\}}(x_1, x_2) = (x_1\,\overline{x}_2 \vee \overline{x}_1\,x_2)(x_1\,\overline{x}_2 \vee \overline{x}_1\,x_2 \vee x_1\,x_2)$$
$$f_{\{1\}}(x_1, x_2) = x_1\,\overline{x}_2 \vee \overline{x}_1\,x_2$$

Ločenje simetričnih funkcij

- Ločenje simetričnih funkcij ohranja simetričnost:

$$\boxed{\begin{aligned} f_C(x_1^{w_{1i}}, x_2^{w_{2i}}, \ldots, x_n^{w_{ni}}) = x_i\ f_A(x_1^{w_{1i}}, x_2^{w_{2i}}, \ldots, x_n^{w_{ni}}) \vee \\ \vee\, \overline{x}_i\ f_B(x_1^{w_{1i}}, x_2^{w_{2i}}, \ldots, x_n^{w_{ni}}) \end{aligned}}$$

$$C = B \cup \{d \mid d = a+1,\ a \in A\}$$

Ločenje simetričnih funkcij (nad.)

- Primer:

$$f_{\{2\}}(x_1, x_2, x_3) = x_1\, x_2\, \bar{x}_3 \vee x_1\, \bar{x}_2\, x_3 \vee \bar{x}_1\, x_2\, x_3$$
$$= x_3\,(x_1\, \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1\, x_2) \vee \bar{x}_3\,(x_1\, x_2)$$
$$= x_3\; f_{\{1\}}(x_1, x_2) \vee \bar{x}_3\; f_{\{2\}}(x_1, x_2)$$

N. Zimic 6-17

Testiranje funkcij na simetričnost

- Funkcija je simetrična, če je invariatna pri transpozicijah:
  $\boxed{(1,2)\, f,\ (1,3)\, f, \ldots, (1,n)\, f}$
- Funkcijo pa je potrebno testirati na simetričnost pri vseh vhodnih naborih, ki jih je 2^n:
  $\boxed{f\,(x_1^{w_{1i}}, x_2^{w_{2i}}, \ldots, x_n^{w_{ni}})}$
- Vseh testiranj je $(n-1)\cdot 2^n$, vendar se to število lahko prepolovi, ker negacija ohranja simetričnost.

N. Zimic 6-18

Testiranje funkcij na simetričnost (nad.)

- Funkcijo lahko testiramo tudi s pomočjo Veitchevega diagrama. Številke v posameznih kvadratkih pomenijo število enic na vhodu.

	x_1	x_1			
x_2	2	3	2	1	
x_2	3	4	3	2	x_4
	2	3	2	1	x_4
	1	2	1	0	
		x_3	x_3		

Simetrična funkcija "pokrije" vse enake številke.

Testiranje funkcij na simetričnost (nad.)

- Simetričnost je potrebno testirati tudi pri vseh vhodnih naborih. Pri Veitchevem diagramu narišemo štirikrat večji diagram (osnovnega prekopiramo).
- Vse vhodne nabore dobimo s premikanjem osnovnega diagrama, v katerega smo vpisali funkcijo. Ker se enice funkcije pokrijejo s številkami enic, predstavlja vhodni nabor, pri katerem je funkcija simetrična.

Testiranje funkcij na simetričnost (nad.)

- Primer razširjenega veitchevega diagrama:

2	3	2	1	2	3	2	1
3	4	3	2	3	4	3	2
2	3	2	1	2	3	2	1
1	2	1	0	1	2	1	0
2	3	2	1	2	3	2	1
3	4	3	2	3	4	3	2
2	3	2	1	2	3	2	1
1	2	1	0	1	2	1	0

N. Zimic 6-21

Testiranje funkcij na simetričnost (nad.)

- Primer testiranja funkcije:

	1		
			1
	1		
1		1	

$$f_{\{1,4\}}(\bar{x}_1, x_2, \bar{x}_3, x_4)$$

$$f_{\{0,3\}}(x_1, \bar{x}_2, x_3, \bar{x}_4)$$

2	3	2	1	2	3	2	1
3	4	3	2	3	4	3	2
2	3	2	1	2	3	2	1
1	2	1	0	1	2	1	0
2	3	2	1	2	3	2	1
3	4	3	2	3	4	3	2
2	3	2	1	2	3	2	1
1	2	1	0	1	2	1	0

N. Zimic 6-22

Strukturalna preklopna vezja

Opredelitev spremenljivk

- Matrika z n vrsticami in m stolpci

$$A_{1:m}^{1:n} \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} \quad A \quad \end{bmatrix}}_{m} \Big\} n$$

- Vodoravna združitev dveh matrik

$$C_{1:(m+n)}^{1:t} = A_{1:m}^{1:t} B_{1:n}^{1:t} \qquad \begin{bmatrix} \underbrace{\quad A \quad}_{m} & \underbrace{\quad B \quad}_{n} \end{bmatrix} \Big\} t$$

Opredelitev spremenljivk (nad.)

- Navpična združitev dveh matrik

$$C^{1:(m+n)}_{1:t} = \begin{matrix} A^{1:m}_{1:t} \\ B^{1:n}_{1:t} \end{matrix} \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} A \\ \hdashline B \end{bmatrix}}_{t} \begin{matrix} \}\, m \\ \}\, n \end{matrix}$$

- Transponirana matrika

$$A^{1:n}_{1:m}; \qquad B^{1:m}_{1:n} = A^{\mathrm{T}\;1:n}_{\;\;\;1:m}; \quad b^i_j = a^j_i$$

Operacije nad vektorji

- Vektorska redukcija (vrstica)

$$\boxed{\begin{aligned} c &= */\tilde{a}_{1:n} \\ c &= a_1 * a_2 * \ldots * a_n \end{aligned}}$$

- Vektorska redukcija (stolpec)

$$\boxed{\begin{aligned} c &= */\tilde{a}^{1:m} \\ c &= a^1 * a^2 * \ldots * a^m \end{aligned}}$$

Operacija * se izvede nad vsemi elementi vrstice oziroma stolpca

Operacije nad matrikami

- Iverson in Liebig sta uvedla operacije nad matrikami:

$$C_{1:m}^{1:n} = A_{1:t}^{1:n} \circ * B_{1:m}^{1:t})$$
$$c_j^i = \circ/(a_{1:t}^i * b_j^{1:t})$$

Operacijo nad matrikami lahko primerjamo z množenjem matrik, če operator * zamenjamo z množenjem in operator ∘ s seštevanjem.

Operacije nad matrikami (nad.)

- Primer:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$A \vee \& B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \vee \& \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

Operacije nad matrikami (nad.)

$$A \vee \& B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \vee \& \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$A \vee \& B = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} \vee a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} \vee a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} \vee a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} \vee a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{11} \vee a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} \vee a_{32}b_{22} \end{bmatrix}$$

Operacije nad matrikami (nad.)

$$A \vee \& B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \vee \& \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \vee \& B = \begin{bmatrix} 01 \vee 10 & 00 \vee 11 \\ 01 \vee 00 & 00 \vee 01 \\ 11 \vee 10 & 10 \vee 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Operacije nad matrikami (nad.)

- Negacija matrike

$$\boxed{C_{1:n}^{1:m} = \overline{A}_{1:n}^{1:m}; \quad c_j^i = \overline{a}_j^i}$$

- Konjunkcija matrik

$$\boxed{C_{1:n}^{1:m} = A_{1:n}^{1:m} \& B_{1:n}^{1:m}; \quad c_j^i = a_j^i\, b_j^i}$$

- Disjunkcija matrik

$$\boxed{C_{1:n}^{1:m} = A_{1:n}^{1:m} \vee B_{1:n}^{1:m}; \quad c_j^i = a_j^i \vee b_j^i}$$

- Operacijo nad matrikami lahko izvedemo tudi z drugimi operatorij (Sheffer, Pirce, ...)

Pravilnostna tabela

- Pravilnostna tabela zapisana z vektorji in matrikami:

$$\begin{array}{c|c} \tilde{x} & y \\ \hline W & \tilde{f} \end{array}$$

- Vektor neodvisnih vhodnih spremenljivk:

$$\tilde{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]$$

- Vektor funkcijskih vrednosti:

$$\tilde{f} = [f_0, f_1, \dots, f_{2^n-1}]^{\mathrm{T}}$$

Pravilnostna tabela (nad.)

- Matrika leve strani pravilnostne tabele:

$$W = \begin{bmatrix} w_{01} & w_{02} & \cdots & w_{0n} \\ w_{11} & w_{12} & \cdots & w_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_{2^n-1\,1} & w_{2^n-1\,2} & \cdots & w_{2^n-1\,n} \end{bmatrix}$$

- Funkcijska vrednost je podana kot skalar:

$y = f(\tilde{x})$

Zapis minterma

- Vektor mintermov:

$\tilde{m} = [m_0, m_1, \ldots, m_{2^n-1}]$

- Enačba minterma:

$\boxed{\tilde{m} = \tilde{x} \,\&\equiv W^{\mathrm{T}}}$

- Primer za dve vhodni spremenljivki:

$$\tilde{m} = \tilde{x} \,\&\equiv W^T = [x_1, x_2] \,\&\equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

Zapis minterma (nad.)

- Primer (nad.):

$$\tilde{m} = [x_1, x_2] \& \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{m} = [(x_1 \equiv 0) \& (x_2 \equiv 0), (x_1 \equiv 0) \& (x_2 \equiv 1), \\ (x_1 \equiv 1) \& (x_2 \equiv 0), (x_1 \equiv 1) \& (x_2 \equiv 1)]$$

$$\boxed{\begin{matrix} x \equiv 1 = x \\ x \equiv 0 = \overline{x} \end{matrix}}$$

$$\tilde{m} = [\overline{x}_1\, \overline{x}_2, \overline{x}_1\, x_2, x_1\, \overline{x}_2, x_1\, x_2] = [m_0, m_1, m_2, m_3]$$

N. Zimic 7-13

Zapis minterma (nad.)

- Različni načini zapisa mintermov:

$$\tilde{m} = [\overline{x}_1\, \overline{x}_2, \overline{x}_1\, x_2, x_1\, \overline{x}_2, x_1\, x_2] = [m_0, m_1, m_2, m_3]$$

$$m_0 = \overline{x}_1\, \overline{x}_2$$

- Mintermski vektor pri konstantnem vhodu:

$$\tilde{m}(\tilde{x}) = \tilde{x} \& \equiv W^{\mathrm{T}}$$

- Primer za dve neodvisni spremenljivki:

$$\tilde{m}([0,1]) = [0,1,0,0]$$

N. Zimic 7-14

PDNO in PKNO

- PDNO zapišemo:

$$\boxed{\begin{aligned} &y = f(\tilde{x}) = \vee / (\tilde{m}(\tilde{x})\,\&\,\tilde{f}^{\mathrm{T}}) = \tilde{m}(\tilde{x}) \vee \& \tilde{f} \\ &y = f(\tilde{x}) = (\tilde{x}\,\& \equiv W^{\mathrm{T}}) \vee \& \tilde{f} \end{aligned}}$$

- Zapis maksterma:

$$\boxed{\tilde{M} = \tilde{x} \vee \nabla W^{\mathrm{T}}}$$

- PKNO v matričnem zapisu:

$$\boxed{\begin{aligned} &y = f(\tilde{x}) = \& / (\tilde{M}(\tilde{x}) \vee \tilde{f}^{\mathrm{T}}) = \tilde{M}(\tilde{x})\,\& \vee \tilde{f} \\ &y = f(\tilde{x}) = (\tilde{x} \vee \nabla W^{\mathrm{T}})\,\& \vee \tilde{f} \end{aligned}}$$

Funkcije z več izhodi

- Pravilnostna tabela za več funkcij:

$$\begin{array}{c|c} \tilde{x} & \tilde{y} \\ \hline W & D \end{array}$$

- Vektor izhodnih funkcij:

$$\tilde{y} = [y_1, y_2, \ldots, y_k]$$

- Kodirno matriko sestavljajo preklopne funkcije.

$$D = \tilde{f}_1\ \tilde{f}_2 \ldots \tilde{f}_k$$

Funkcije z več izhodi (nad.)

- Funkcijo z več izhodi v PDNO zapišemo:

$$\tilde{y} = f(\tilde{x}) = (\tilde{x} \& \equiv W^{\mathrm{T}}) \vee \& D$$

- V PKNO obliki:

$$\tilde{y} = f(\tilde{x}) = (\tilde{x} \vee \nabla W^{\mathrm{T}}) \& \vee D$$

Primer zapisa preklopne funkcije

- Podana je funkcija:

$$f(x_1, x_2) = \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2$$

- Zapis funkcije s pravilnostno tabelo:

x_1, x_2	$f(x_1, x_2)$
0 0	0
0 1	1
1 0	1
1 1	0

Primer zapisa preklopne funkcije (nad.)

- Strukturalni zapis preklopne funkcije:

$$y = f(\tilde{x}) = (\tilde{x} \& \equiv W^{\mathrm{T}}) \vee \& \tilde{f}$$

$$y = f(\tilde{x}) = \left([x_1, x_2] \& \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \vee \& \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

N. Zimic

7-19

Primer zapisa preklopne funkcije (nad.)

$$y = f(\tilde{x}) = ([\overline{x}_1 \overline{x}_2, \overline{x}_1 x_2, x_1 \overline{x}_2, x_1 x_2]) \vee \& \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y = f(\tilde{x}) = \vee /[\overline{x}_1\, \overline{x}_2\, 0, \overline{x}_1\, x_2\, 1, x_1\, \overline{x}_2\, 1, x_1\, x_2\, 0]$$

$$y = f(\tilde{x}) = \vee /[0, \overline{x}_1\, x_2, x_1\, \overline{x}_2, 0]$$

$$y = f(\tilde{x}) = 0 \vee \overline{x}_1\, x_2 \vee x_1\, \overline{x}_2 \vee 0 = \overline{x}_1\, x_2 \vee x_1\, \overline{x}_2$$

N. Zimic

7-20

Kodirnik

- Funkcija kodirnika je kodiranje vhodnih vrednosti v izhodne vrednosti
- Pri kodirnikih je lahko naenkrat aktiven samo en vhod. To so tako imenovani mintermski vhodi
- Najbolj pogosto se uporabljajo BCD kodirniki (16 vhodov kodira v 4 izhode) in 8/3 kodirniki (8 vhodov in 3 izhodi)

N. Zimic 7-21

Kodirnik (nad.)

- V kodirnik vstopajo mintermski vhodi (mintermski vhodi niso mintermi):

$\tilde{m} = [m_0, m_1, \ldots]$

- Izhod kodirnika je:

$\tilde{y} = [y_1, y_2, \ldots]$

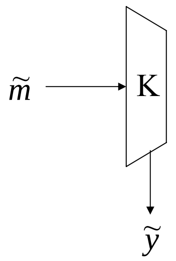
- Kodirnik vsebuje kodirno matriko, preko katere se vrši kodiranje. Ta matrika je konstanta in se ne spreminja.

N. Zimic 7-22

Kodirnik (nad.)

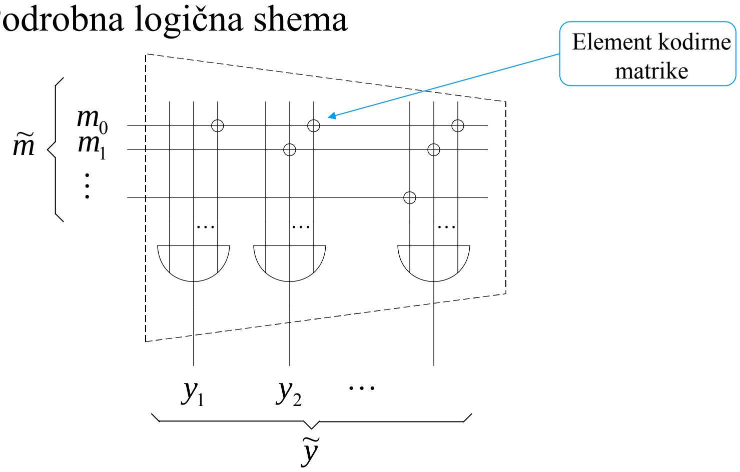
- Logična enačba kodirnika je:

  $\boxed{\tilde{y} = \tilde{m} \vee \& K}$
- Simbol za kodirnik:



Kodirnik (nad.)

- Podrobna logična shema



Kodirnik (nad.)

- Pravilnostna tabela kodirnika z 8 vhodi in 3 izhodi

m_0	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	m_7	y_1	y_2	y_3
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1
0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1

Kodirnik (nad.)

- Primer kodirnika z 8 vhodi in 3 izhodi

$$\boxed{\tilde{y} = \tilde{m} \vee \& K}$$

$$\tilde{m} = [m_0, m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7]$$

$$\tilde{y} = [y_1, y_2, y_3]$$

$$y_1 = m_4 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7$$

$$y_2 = m_2 \vee m_3 \vee m_6 \vee m_7$$

$$y_3 = m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_7$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Dekodirnik

- Funkcija dekodirnika je preslikava vhodnih vrednosti v mintermske izhode.
- Značilnost mintermskih izhodov je ta, da je vedno aktiven največ en izhod.
- Pogosto se uporabljajo dekodirniki s tremo vhodi in osmimi izhodi (3/8)

Dekodirnik (nad.)

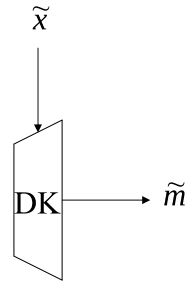
- V dekodirnik vstopajo neodvisne vhodne spremenljivke
  $\tilde{x} = [x_0, x_1, \ldots]$
- Izhod dekodirnika je mintermski vektor
  $\tilde{m} = [m_0, m_1, \ldots]$
- Dekodiranje se vrši preko dekodirne matrike *D*. Matrika se med delovanjem dekodirnika ne spreminja.

Dekodirnik (nad.)

- Logična enačba dekodirnika je:

$\boxed{\tilde{m} = \tilde{x}\& \equiv D^{\mathrm{T}}}$

- Simbol za dekodirnik:



Dekodirnik (nad.)

- Pravilnostna tabela dekodirnika z 3 vhodi

x_1	x_2	x_3	m_0	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	m_7
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1

Dekodirnik (nad.)

- Primer dekodirnika s 3 vhodi in 8 izhodi

$$\tilde{m} = \tilde{x} \,\&\!\equiv D^{\mathrm{T}}$$

$$\tilde{x} = [x_1, x_2, x_3]$$

$$\tilde{m} = [m_0, m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7]$$

$$m_0 = (x_1 \equiv 0)(x_2 \equiv 0)(x_3 \equiv 0) = \bar{x}_1\, \bar{x}_2\, \bar{x}_3$$

$$m_1 = (x_1 \equiv 0)(x_2 \equiv 0)(x_3 \equiv 1) = \bar{x}_1\, \bar{x}_2\, x_3$$

$$\dots$$

$$m_7 = (x_1 \equiv 1)(x_2 \equiv 1)(x_3 \equiv 1) = x_1\, x_2\, x_3$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Multiplekser

- Multiplekser je gradnik, ki je po svojem načinu delovanja podoben preklopniku.
- V multiplekser vstopa naslovni mintermski vektor, katerega naloga je izbiranje vhoda

$$\tilde{m} = [m_0, m_1, \ldots]$$

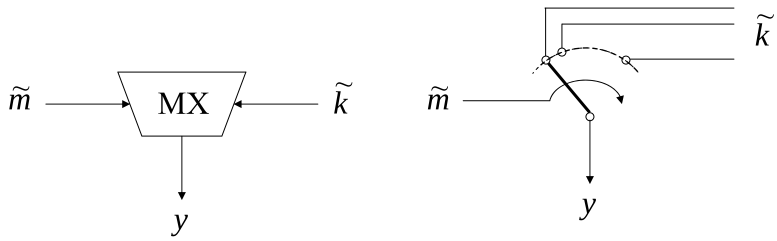
- Izhod je izbrana vrednost iz vektorja

$$\tilde{k} = [k_0, k_1, \ldots]$$

- Izstopa skalar y

Multiplekser (nad.)

- Logična enačba multiplekserja je
  $\boxed{y = \tilde{m} \vee \& \tilde{k}^T}$
- Simbol za multiplekser je



Multiplekser (nad.)

- Izhod multiplekserja razširimo na vektor
  $\tilde{y} = [y_0, y_1, \ldots]$
- Ustrezno se tudi vhodi razširijo, tako da dobimo vhodno matriko K
- Enačba takšnega multiplekserja je
  $\tilde{y} = \tilde{m} \vee \& K$

Multiplekser (nad.)

- Običajno pred naslovne vhode postavimo dekodirnik in s tem zmanjšamo število priključkov.
- Enačba za skalarni izhod je

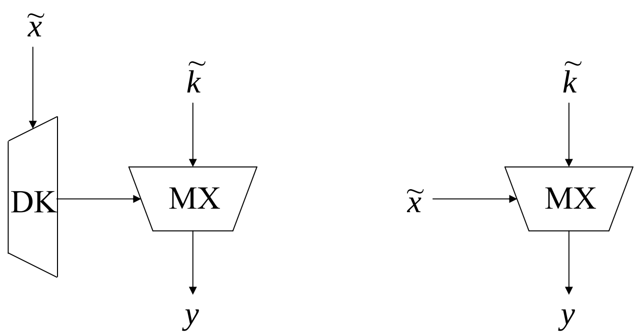
$y = (\tilde{x} \& \equiv D^T) \vee \& \tilde{k}^T$

- Enačba za vektorski izhod je

$\tilde{y} = (\tilde{x} \& \equiv D^T) \vee \& K$

Multiplekser (nad.)

- Simbol za razširjeni multiplekser je



Multiplekser (nad.)

- Primer multiplekserja s tremi naslovnimi vhodi in enim izhodom

$$\boxed{y = (\tilde{x} \& \equiv D^T) \vee \& \tilde{k}^T}$$

$$\tilde{x} = [x_1, x_2, x_3]$$
$$\tilde{k} = [k_0, k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7]$$

$$y = k_0\, \bar{x}_1\, \bar{x}_2\, \bar{x}_3 \vee k_1\, \bar{x}_1\, \bar{x}_2\, x_3 \vee \ldots \vee k_7\, x_1\, x_2\, x_3$$

Multiplekser (nad.)

- Pravilnostna tabela za prejšnji primer

x_1	x_2	x_3	y
0	0	0	k_0
0	0	1	k_1
0	1	0	k_2
0	1	1	k_3
1	0	0	k_4
1	0	1	k_5
1	1	0	k_6
1	1	1	k_7

Demultiplekser

- Demultiplekser opravlja obratno funkcijo multipleksérja.
- V demultiplekser vstopa vhodna spremenljivka y in naslovni mintermski vektor

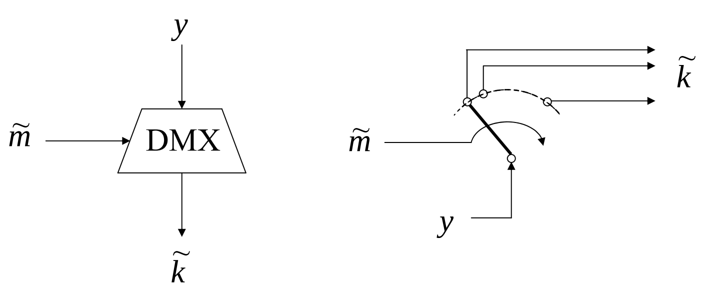
  $\tilde{m} = [m_0, m_1, \ldots]$
- Izhod demultiplekserja je vektor

  $\tilde{k} = [k_0, k_1, \ldots]$

Demultiplekser (nad.)

- Enačba demultiplekserja je

  $\boxed{\tilde{k} = y \vee \& \tilde{m}}$
- Simbol za demultiplekser je



Demultiplekser (nad.)

- Demultiplekser z vektorskim vhodom

  $\tilde{y} = [y_1, y_2, \ldots]$
- Izhod takšnega demultiplekserja ima matrično obliko *K*.
- Enačba demultiplekserja je

  $K = \tilde{y}^{\mathrm{T}} \vee \& \tilde{m}$

Demultiplekser (nad.)

- Običajno pred naslovne vhode postavimo dekodirnik in s tem zmanjšamo število priključkov.
- Enačba za skalarni naslovni vhod je

  $\boxed{\tilde{k} = y \vee \& (\tilde{x} \& \equiv D^T)}$
- Enačba za naslovni vektorski vhod je

  $\boxed{K = \tilde{y}^T \vee \& (\tilde{x} \& \equiv D^T)}$

Demultiplekser (nad.)

- Primer demultiplekserja s tremi naslovnimi vhodi

$$\tilde{k} = y \vee \&(\tilde{x} \& \equiv D^T)$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{x} = [x_1, x_2, x_3]$$

$$\tilde{k} = [k_0, k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7]$$

$$k_0 = y\,(x_1 \equiv 0)\,(x_2 \equiv 0)\,(x_3 \equiv 0) = y\,\bar{x}_1\,\bar{x}_2\,\bar{x}_3$$

$$k_1 = y\,(x_1 \equiv 0)\,(x_2 \equiv 0)\,(x_3 \equiv 1) = y\,\bar{x}_1\,\bar{x}_2\,x_3$$

$$\ldots$$

$$k_7 = y\,(x_1 \equiv 1)\,(x_2 \equiv 1)\,(x_3 \equiv 1) = y\,x_1\,x_2\,x_3$$

Demultiplekser (nad.)

- Pravilnostna tabela demultiplekserja s 3 vhodi

x_1	x_2	x_3	k_0	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7
0	0	0	y	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	y	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	y	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	y	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	y	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	y	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0	y	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	y

Seštevalnik

- Primera pravilnostnih tabel za seštevalnika z dvema in tremi spremenljivkami

vhodne spremenljivke

rezultat

prenos

x_1	x_2	s	c
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

x_1	x_2	x_3	s	c
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

N. Zimic 7-45

Seštevalnik (nad.)

- Vhodne spremenljivke

  $\tilde{x} = [x_1, x_2]$ $\tilde{x} = [x_1, x_2, x_3]$

- Izhodni vektor

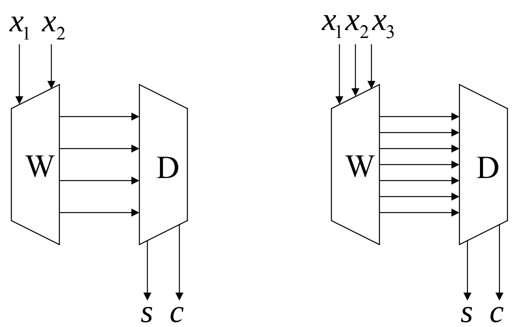
  $\tilde{y} = [s, c]$

- Kodirna in dekodirna matrika:
  - kodirna matrika W je leva stran pravilnostne tabele
  - dekodirna matrika D je desna stran pravilnostne tabele

N. Zimic 7-46

Seštevalnik (nad.)

- Logična shema seštevalnika



N. Zimic 7-47

Realizacija preklopnih funkcij

- Neodvisne vhodne spremenljivke preklopne funkcije razdelimo na naslovni in podatkovni del:

  $x_a = (x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_a}) \quad x_d = (x_{i_{a+1}}, x_{i_{a+2}}, \ldots, x_{i_n})$

- Pri tem velja:

  $x_a \cup x_d = \{x_1, x_2, \ldots x_n\} \quad x_a \cap x_d = \emptyset$

- V nadaljevanju bomo zaradi enostavnosti uporabili:

  $x_{i_1} = x_1, \quad x_{i_2} = x_2, \quad \ldots, \quad x_{i_n} = x_n$

N. Zimic 7-48

Realizacija preklopnih funkcij (nad.)

- Na osnovi razčlenjevanja lahko zapišemo:

$$\boxed{f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigvee_{i=0}^{2^a-1} x_1^{w_{1i}} x_2^{w_{2i}} \ldots x_a^{w_{ai}} f(w_{1i}, w_{2i}, \ldots, w_{ai}, x_{a+1}, x_{a+2}, \ldots, x_n)}$$

- i-ti funkcijski ostanek funkcije je:

$$\boxed{f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(w_{1i}, w_{2i}, \ldots, w_{ai}, x_{a+1}, x_{a+2}, \ldots, x_n)}$$

- Funkcijo lahko realiziramo s pomočjo multiplekserja. Na naslovne vhode pripeljemo naslovni del neodvisnih vhodnih spremenljivk, na podatkovni del pa ustrezne funkcijske ostanke.

N. Zimic 7-49

Realizacija preklopnih funkcij (nad.)

- Pri realizaciji preklopnih funkcij običajno uporabljamo dva primera:
  - funkcija se razčleni po vseh spremenljivkah. V takem primeru funkcijski ostanki zavzamejo konstantne vrednosti 0 ali 1.
  - funkcija se razčleni po n-1 spremenljivkah, kjer je n število neodvisnih vhodnih spremenljivk. V tem primeru lahko funkcijski ostanek zavzame eno izmed naslednjih vrednosti: $0, 1, x, \bar{x}$.

N. Zimic 7-50

Realizacija preklopnih funkcij (nad.)

- Primer realizacije preklopne funkcije s pomočjo multiplekserja:

$f(x_1, x_2) = x_1\,\overline{x}_2 \vee \overline{x}_1\,x_2$

- Naslovni del spremenljivk vsebuje spremenljivki:

$x_a = \{x_1, x_2\}$

- Funkcijski ostanki so:

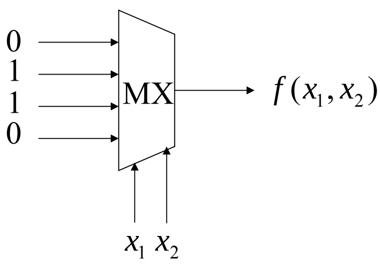
$f_0(x_1, x_2) = f(0,0) = 0 \qquad f_2(x_1, x_2) = f(1,0) = 1$

$f_1(x_1, x_2) = f(0,1) = 1 \qquad f_3(x_1, x_2) = f(1,1) = 0$

N. Zimic 7-51

Realizacija preklopnih funkcij (nad.)

- Električna shema vezja:



x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

N. Zimic 7-52

Realizacija preklopnih funkcij (nad.)

- Nadaljevanje primera:

$$f(x_1, x_2) = x_1\,\overline{x}_2 \vee \overline{x}_1\,x_2$$

- Naslovni del spremenljivk vsebuje spremenljivko:

$$x_a = \{x_1\}$$

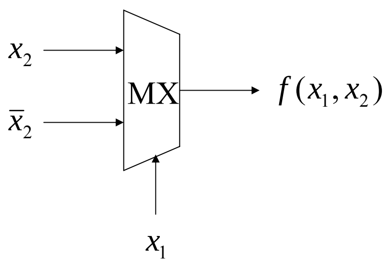
- Ustrezna funkcijska ostanka sta:

$$f_0(x_1, x_2) = f(0, x_2) = x_2$$

$$f_1(x_1, x_2) = f(1, x_2) = \overline{x}_2$$

Realizacija preklopnih funkcij (nad.)

- Električna shema vezaja:



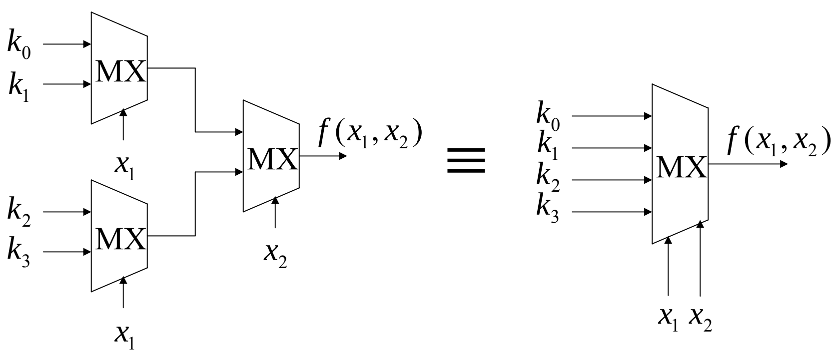
x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Povezovanje multipleksérjev

- Z drevesno vezavo multipleksérjev dobimo strukturo, ki je funkcijsko enakovredna multipleksérju z večjim številom naslovnih vhodov.
- Z večanjem števila nivojev se hitro veča tudi število potrebnih gradnikov, še hitreje pa se veča število vhodov v takšno vezje. To pomeni, da lahko realiziramo kompleksnejše funkcije.
- Multiplekser spada med tako imenovane univerzalne gradnike za preklopna vezja.

Povezovanje multipleksérjev (nad.)

- Slika drevesne vezave multipleksérjev



Bralni pomnilnik

- Bralni pomnilnik (ROM read only memory) je pomnilnik, ki je namenjen samo branju.
- Obstajajo tudi izvedenke, v katere je možno po posebnem postopku pisati in napisano tudi brisati (PROM, EPROM, EEPROM,...).
- Glavna značilnost bralnih pomnilnikov je, da pri izpadu električnega napajanja ne izgubijo informacije, ki je v njih zapisana.

N. Zimic 7-57

Bralni pomnilnik (nad.)

- Parametri bralnega pomnilnika:
  - naslovni vhodi

    $\tilde{x} = [x_1, x_2, \ldots]$
  - izhodi

    $\tilde{y} = [y_1, y_2, \ldots]$
  - dekodirna in kodirna matrika

    DK, K
  - v kodirni matriki je zapisana vsebina bralnega pomnilnika

N. Zimic 7-58

Bralni pomnilnik (nad.)

- Enačbe za bralni pomnilnik:
  - naslavljanje

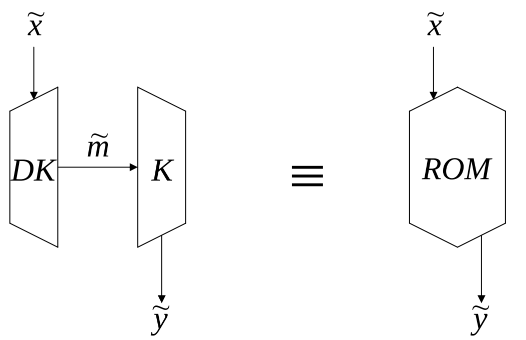
    $\tilde{m} = \tilde{x} \& \equiv D^{\mathrm{T}}$
  - branje

    $\tilde{y} = \tilde{m} \vee \& K$
  - celotna enačba

    $\tilde{y} = (\tilde{x} \& \equiv D^{\mathrm{T}}) \vee \& K$

Bralni pomnilnik (nad.)

- Električni simbol



Bralni pomnilnik (nad.)

- Primer bralnega pomninika:

Vhodni vektor → $x_1\ x_2\ x_3$; Izhodni vektor → $y_1\ y_2\ y_3\ y_4$

Dekodirna matrika → (x stolpci); (y stolpci) → Kodirna matrika

x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	y_4
0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0
1	0	1	1	0	1	0
1	1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0	1

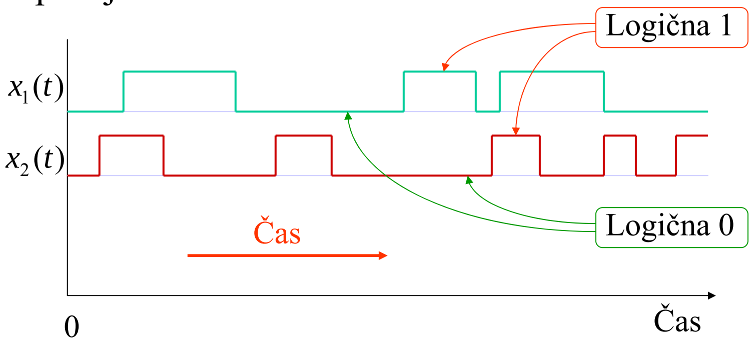
SEKVENČNA VEZJA

Čas v preklopnih vezjih

- Do sedaj smo vsa preklopna vezja opazovali v določenem trenutku brez upoštevanja časa
- Čas vnaša v preklopna vezja dodatno dimenzijo
- Z vpeljavo časa v preklopna vezja preidemo z odločanja v pomnjenje

Čas v preklopnih vezjih (nad.)

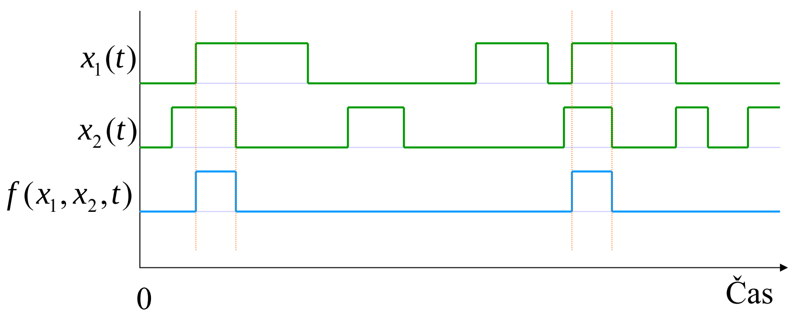
- Spreminjanje vhodnih spremenljivk lahko opazujemo v času:



Čas v preklopnih vezjih (nad.)

- Konjunkcija opazovana v času:

  $f(x_1, x_2, t) = x_1(t)\,x_2(t)$



Časovni operator

- Časovni operator je definiran:

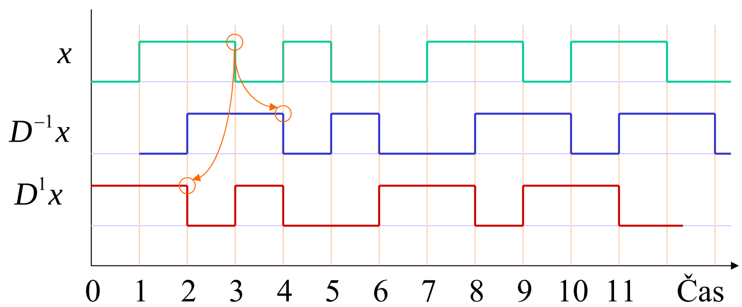
$$D^k x = \begin{cases} x, & \text{pri} \quad t = k \\ 0, & \text{pri} \quad t \neq k \end{cases}$$

- Časovni operator D^k pomeni premik vhodne spremenljivke v času za k časovnih enot.

$$x \longrightarrow \boxed{D^k} \longrightarrow D^k x$$

Časovni operator (nad.)

- Primer:



Časovni operator (nad.)

- Če je pri časovnem operatorju parameter k=0, nam pomeni sedanjost:

$$\boxed{D^0 x(t) = x(t)}$$

- Negativni parameter pomeni preteklost:

$$\boxed{D^{-1}x \qquad D^{-1}x(t) = x(t-1)}$$

- Pozitivni parameter prihodnost:

$$\boxed{D^{1}x \qquad D^{1}x(t) = x(t+1)}$$

Časovni operator (nad.)

- Če pri zapisu uporabljamo časovni operator D^k, potem pri zapisu ne potrebujemo časovne spremenljivke t.
- Vse spremenljivke opazujemo v sedanjosti, časovni odmiki pa so podani s časovnim operatorjem.
- Časovni operator je še posebej primeren pri minimizaciji časovnih preklopnih vezij.

Časovni operator (nad.)

- Lastnosti časovnega operatorja:

$$\boxed{\begin{aligned} &D^0 x = x \\ &D^k (D^j x) = D^{k+j} x \\ &D^k (x_1\, x_2) = D^k x_1\, D^k x_2 \\ &\overline{D^k x} = \overline{D}^k x = D^k \overline{x} \end{aligned}}$$

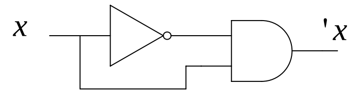
Fronta

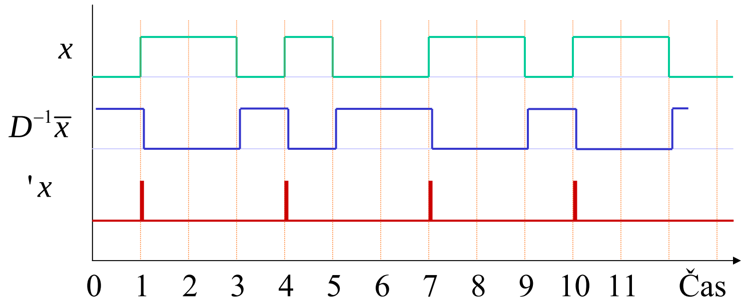
- Fronta je sprememba nivoja spremenljivke v času.
- Prva fronta je sprememba iz 0 v 1, zadnja fronta je sprememba iz 1 v 0.
- Prvo fronto spremenljivke x označujemo z \`x, zadnjo pa z x\`.
- Fronto lahko dobimo:

$$\boxed{{}'x = (D^{-1}\overline{x})\, x \qquad x' = (D^{-1}x)\, \overline{x}}$$

Fronta

$$'x = (D^{-1}\overline{x})\,x$$



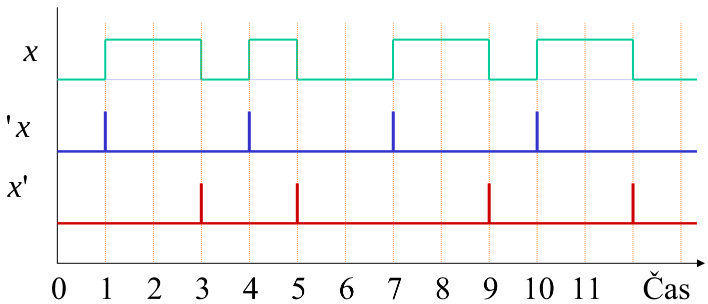


Fronta (nad.)

- Relacija med frontami:

$$'x = (\overline{x})' \qquad x' = '(\overline{x})$$

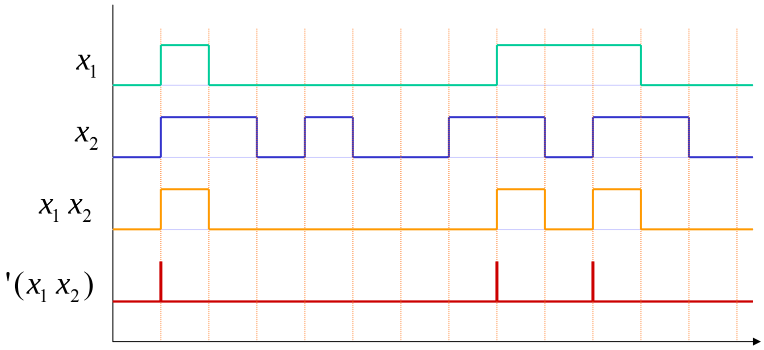
- Primer front:



Fronta (nad.)

- Fronta konjunkcije:

$$'(x_1\ x_2) = x_1\ 'x_2 \vee 'x_1\ x_2 \vee 'x_1\ 'x_2$$



Fronta (nad.)

- Relacije med funkcijami in fronto:

$$'(x_1\ x_2) = x_1\ 'x_2 \vee 'x_1\ x_2 \vee 'x_1\ 'x_2$$

$$(x_1\ x_2)' = x_1\ x_2' \vee x_1'\ x_2 \vee x_1'\ x_2'$$

$$'(x_1 \vee x_2) = \bar{x}_1\ 'x_2 \vee 'x_1\ \bar{x}_2 \vee 'x_1\ 'x_2$$

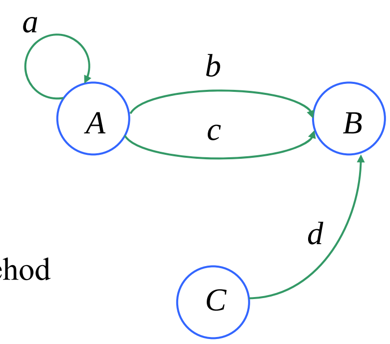
$$(x_1 \vee x_2)' = \bar{x}_1\ x_2' \vee x_1'\ \bar{x}_2 \vee x_1'\ x_2'$$

Diagram prehajanja stanj

- Diagram prehajanja stanj služi za ponazarjanje delovanja sekvenčnih vezij v grafični obliki.
- Diagram je sestavljen iz krogov, ki predstavljajo stanja in usmerjenih povezav (puščic), ki predstavljajo spremembo stanja.
- Nad puščicami je zapisan pogoj, pri katerem pride do sprememba stanja

Diagram prehajanja stanj (nad.)

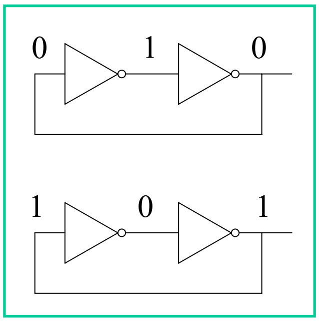
- Primer diagrama prehajanja stanj:



  - *A*,*B*,*C*: stanja
  - *a*,*b*,*c*,*d*: pogoji za prehod

Enostavne pomnilne celice

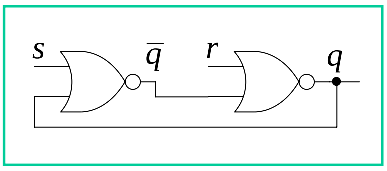
- Pomnjenje pomeni ohranjanje stanja. Takšno stanje lahko doseženo z vezavo negatorjev



Vezje lahko zavzame dve stabilni stanji - stanje izhoda 0 ali stanje izhoda 1.

Enostavne pomnilne celice (nad.)

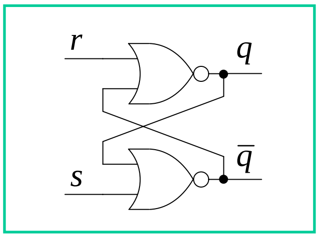
- Če prejšnje vezje razširimo, dobimo pomnilno celico RS (reset, set)

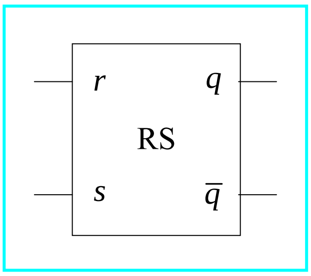


r	s	$D^1 q$	$D^1 \overline{q}$
0	0	q	$\overline{q}$
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	X	X

Enostavne pomnilne celice (nad.)

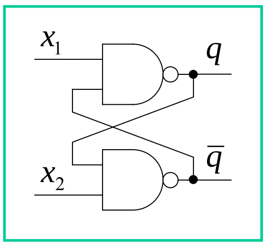
- RS celica





Enostavne pomnilne celice (nad.)

- Pomnilna celica realizirana z Shefferjevimi operatorji



x_1	x_2	D^1q	$D^1\bar{q}$
0	0	X	X
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	q	$\bar{q}$

RS pomnilna celica

- Poseben primer nastopi, če sta oba vhoda (set in reset) na logični enici. V takšnem primeru preide vezje v nestabilno stanje, zato se takšne kombinacije na vhodu izogibamo, oziroma je to prepovedan vhod.
- Enačba RS pomnilne celice je:

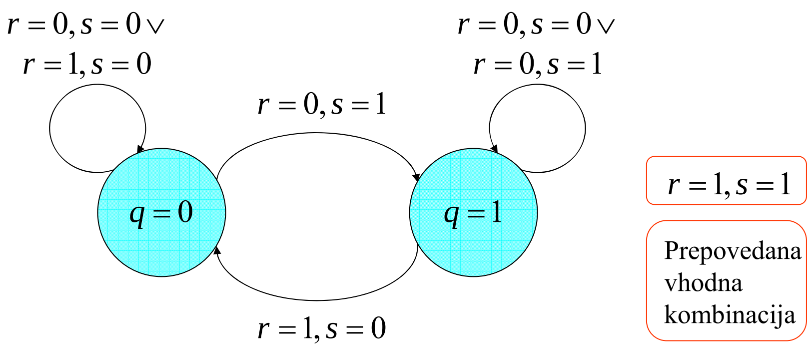
$$D^1 q = \bar{r}\, q \vee s \qquad \boxed{r\,s = 0}$$

Pogoj, ki mora biti izpolnjen pri rs pomnilni celici

$$q(t+1) = \bar{r}\, q(t) \vee s \qquad r\,s = 0$$

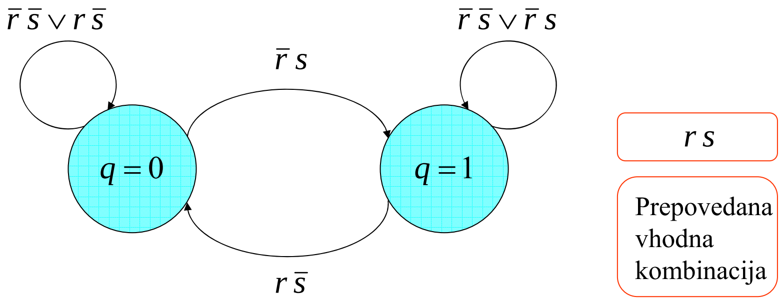
RS pomnilna celica (nad.)

- Diagram prehajanja stanj za RS pomnilno celico:



RS pomnilna celica (nad.)

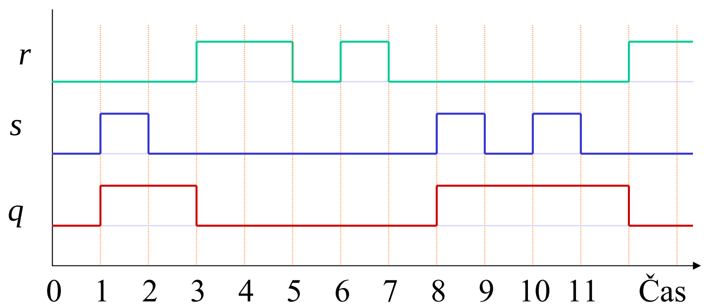
- Diagram prehajanja stanj za RS pomnilno celico:



N. Zimic 8-23

RS pomnilna celica (nad.)

- Časovni diagram za RS pomnilno celico:



N. Zimic 8-24

T pomnilna celica

- T (trigger) pomnilna celica ima samo en vhod (t). Vrednost pomnilne celice se spreminja, če je vhod visok. Pri nizkem vhodu se vrednost ohranja.

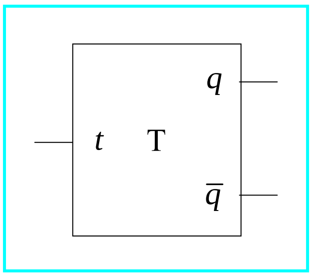
$$D^1q = \bar{t}q \vee t\bar{q}$$
$$q(t+1) = \bar{t}(t)\,q(t) \vee t(t)\,\bar{q}(t)$$

t	q	D^1q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

t	D^1q
0	q
1	$\bar{q}$

T pomnilna celica

- Simbol ter diagram

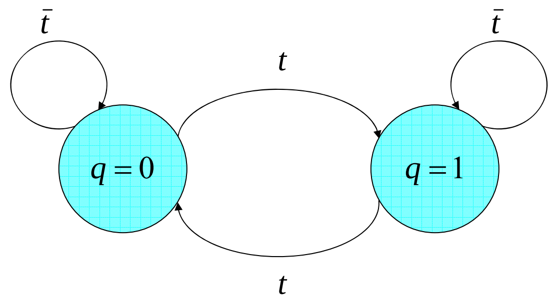


$D^1q:$

q \ t	0	1
0	0	1
1	1	0

T pomnilna celica (nad.)

- Diagram prehajanja stanj za T pomnilno celico:



N. Zimic 8-27

D pomnilna celica

- D (delay) pomnilna celica ima samo en vhod (d). Vrednost pomnilne celice je zakasnjena vrednost vhodne spremenljivke d.

$$D^1 q = d$$

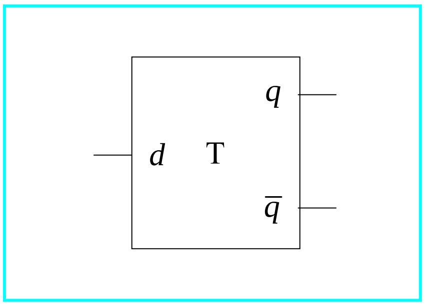
$$q(t+1) = d$$

d	$D^1 q$
0	0
1	1

N. Zimic 8-28

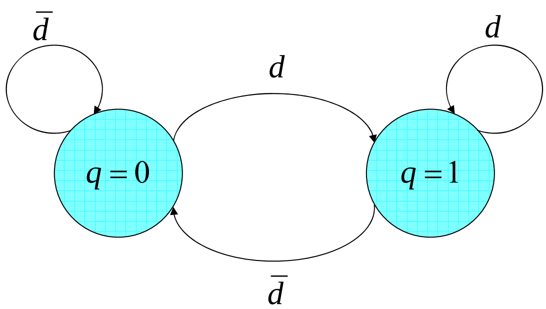
D pomnilna celica (nad.)

- Simbol



D pomnilna celica (nad.)

- Diagram prehajanja stanj za D pomnilno celico:



JK pomnilna celica

- JK pomnilna celica ima dva vhoda, j - brezpogojno postavljanje celice in k - brezpogojno brisanje celice. Če sta oba vhoda hkrati po vrednosti 1, se vrednost pomnilne celice negira.

$$D^1 q = q\bar{k} \vee \bar{q}\, j$$

$$q(t+1) = q(t)\bar{k} \vee \bar{q}(t)\, j$$

j	k	$D^1 q$
0	0	q
0	1	0
1	0	1
1	1	$\bar{q}$

JK pomnilna celica (nad.)

- Razširjena pravilnostna tabela in Veitchev diagram.

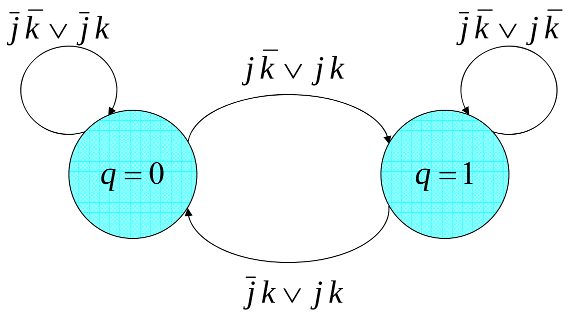
$D^1 q$

	j	j		
k	1	0	0	0
	1	1	1	0
		q	q	

j	k	q	$D^1 q$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

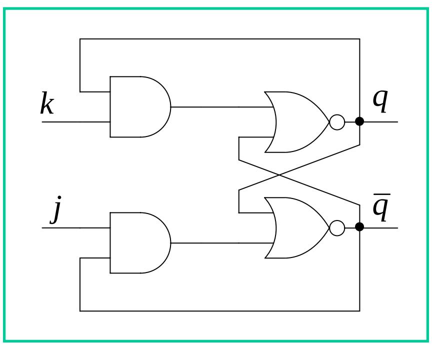
JK pomnilna celica (nad.)

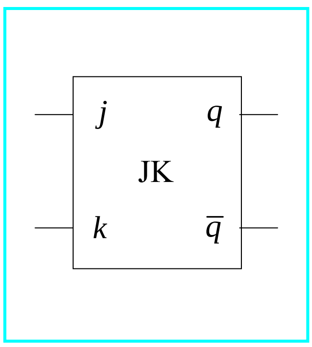
- Diagram prehajanja stanj za JK pomnilno celico:



JK pomnilna celica (nad.)

- Logična shema in simbol za JK pomnilno celico:



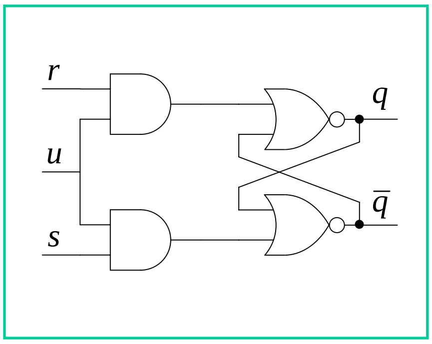


Sinhrone pomnilne celice

- Pri pomnilnih celicah se pojavi vprašanje, kdaj naj celica spremeni svoje stanje. Problem je predvsem pri T in JK pomnilni celici, ko le ti negirata svojo vrednost. Zato v pomnilne celice uvedemo sinhronizacijo na urin impulz. V naslednjih primerih urin impulz predstavlja fronta (impulz, ki ima izredno kratko trajanje).

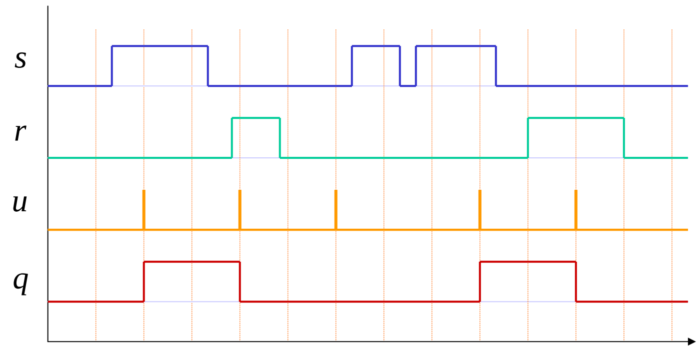
Sinhrone pomnilne celice (nad.)

- Primer RS pomnilne celice, sinhronizirane na urin impulz.



Sinhrone pomnilne celice (nad.)

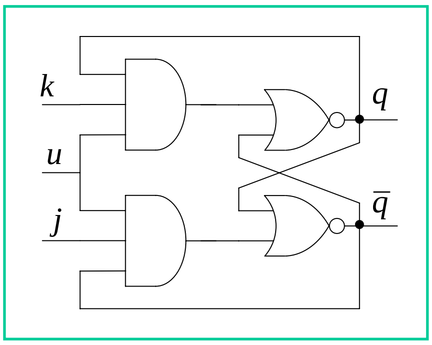
- Primer delovanja sinhrone RS celice:



N. Zimic 8-37

Sinhrone pomnilne celice (nad.)

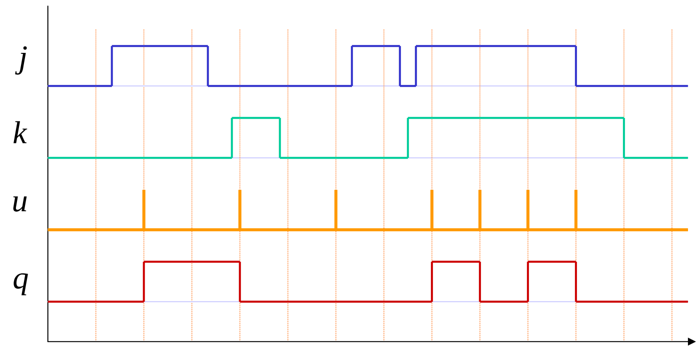
- Primer JK pomnilne celice, sinhronizirane na urin impulz.



N. Zimic 8-38

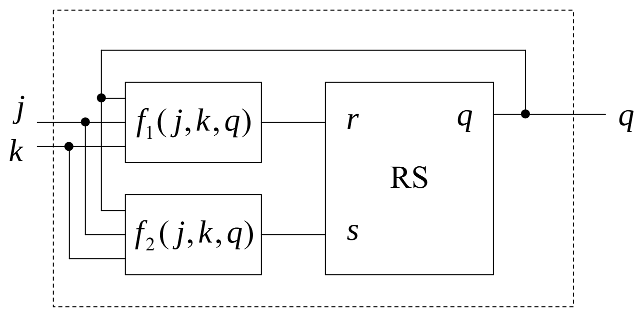
Sinhrone pomnilne celice (nad.)

- Primer delovanja sinhrone JK celice:



Realizacija JK celice z RS pomnilno celico

- Realizacija JK z RS pomnilno celico:



Realizacija JK celice z RS pomnilno celico (nad.)

- Realizacija JK z RS pomnilno celico:

r	s	D^1q
0	0	q
0	1	1
1	0	0
1	1	X

q	D^1q	r	s
0	0	x	0
0	1	0	1
1	0	1	0
1	1	0	x

Vhodne vrednosti v RS pomnilno celico, ki jih pogojuje stanje pomnilne celice v času *t* in *t+1* v levi strani pravilnostne tabele

x predstavlja logično 0 ali 1 (karkoli)

Realizacija JK celice z RS pomnilno celico (nad.)

j	k	q	D^1q	f_1	f_2
0	0	0	0	x	0
0	0	1	1	0	x
0	1	0	0	x	0
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	1
1	0	1	1	0	x
1	1	0	1	0	1
1	1	1	0	1	0

Sprememba stanja JK pomnilne celice pogojuje vhod v RS pomnilno celico

Realizacija JK celice z RS pomnilno celico (nad.)

- Realizacija funkcij, ki vstopata v RS celico:

$f_1(j,k,q)$:

k	0	1	1	x
	0	0	0	x

$f_2(j,k,q)$:

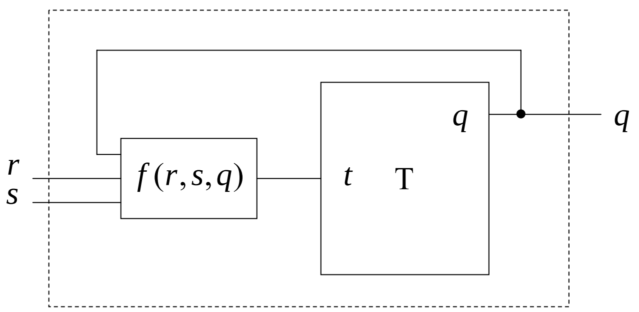
k	1	0	0	0
	1	x	x	0

$$f_1(j,k,q) = k\,q$$

$$f_2(j,k,q) = j\,\overline{q}$$

Realizacija RS celice s T pomnilno celico

- Realizacija RS s T pomnilno celico:



Realizacija RS celice s T pomnilno celico(nad.)

- Lastnost T pomnilne celice:

t	q	D^1q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

q	D^1q	t
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Vhodne vrednosti v T pomnilno celico, ki jih pogojuje stanje pomnilne celice v času *t* in *t+1* na levi strani pravilnostne tabele

Realizacija RS celice s T pomnilno celico(nad.)

r	s	q	D^1q	t
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	1	0	1
1	1	0	X	x
1	1	1	X	x

Sprememba stanja RS pomnilne celice pogojuje vhod v T pomnilno celico

Nedovoljeni vhodi

Poljuben vhod v T pomnilno celico

Realizacija RS celice s T pomnilno celico(nad.)

- Realizacija funkcije, ki vstopa v T pomnilno celico:

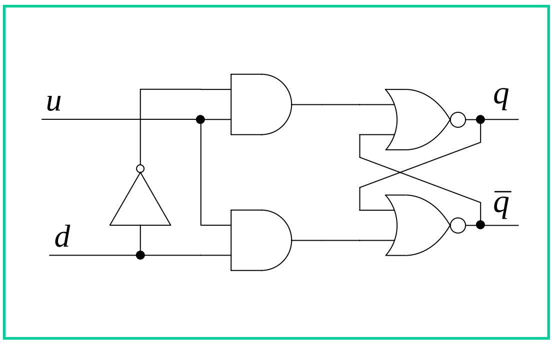
$f(r,s,q):$

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & \multicolumn{2}{c}{\overline{\quad r \quad}} & & \\
s & x & x & 0 & 1 \\
 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 & & \multicolumn{2}{c}{\underline{\quad q \quad}} & \\
\end{array}
$$

$$f(r,s,q) = r\,q \vee s\,\overline{q}$$

Pomnilne celice s predpomnjenjem

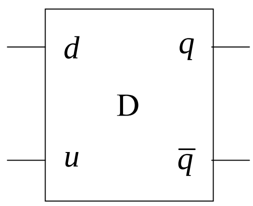
- D pomnilna celica sinhronizirana na urin impulz:



Pomnilne celice s predpomnjenjem (nad)

- D pomnilna celica sinhronizirana na urin impulz:
- Logična enačba:

$$D^1 q = u\, d \vee \bar{u}\, q$$

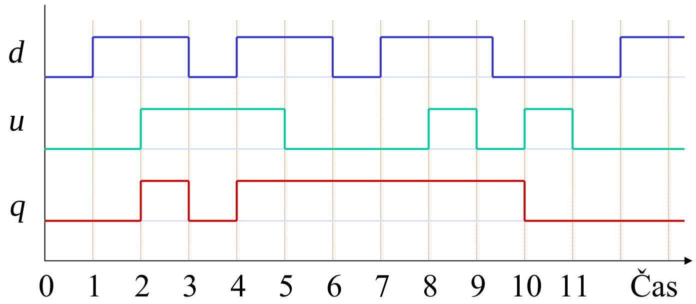


Vrednost D pomnilne celice se spreminja skladno z vhodom *d*, ko je urin vhod visok in ohranja, ko je urin vhod nizek.

N. Zimic 8-49

Pomnilne celice s predpomnjenjem (nad.)

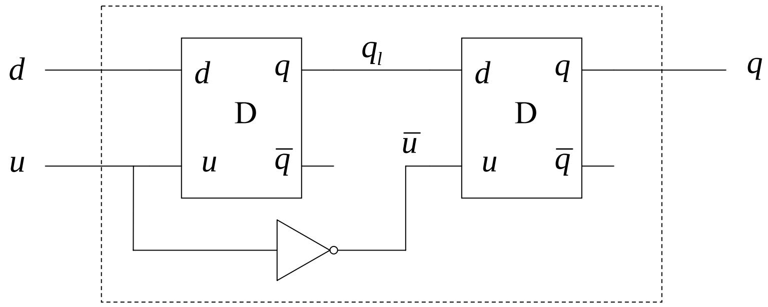
- Časovni diagram za D pomnilno celico sinhronizirano na urin impulz:



N. Zimic 8-50

D pomnilna celica s predpomnjenjem (nad.)

- S povezavo dveh pomnilnih celic dobimo pomnilno celico s predpomnjenjem:



D pomnilna celica s predpomnjenjem (nad.)

- Glavna značilnost pomnilne celice s predpomnjenjem je v sinhronizaciji na fronto urinega impulza:
  - prva pomnilna celica spreminja svoje stanje, kadar je urin impulz visok. Ko je urin impulz nizek, se izhod prve celice q_l ne spreminja
  - druga pomnilna celica spreminja svoje stanje, kadar je urin impulz nizek. Ker se v tem primeru prva celica ne spreminja, se tudi izhod ne spreminja
  - do spremembe pride samo pri prehodu ure iz visokega v nizko stanje, to je pri zadnji fronti

D pomnilna celica s predpomnjenjem (nad.)

- Enačba D pomnilne celice s predpomnjenjem:
  - notranja pomnilna celica

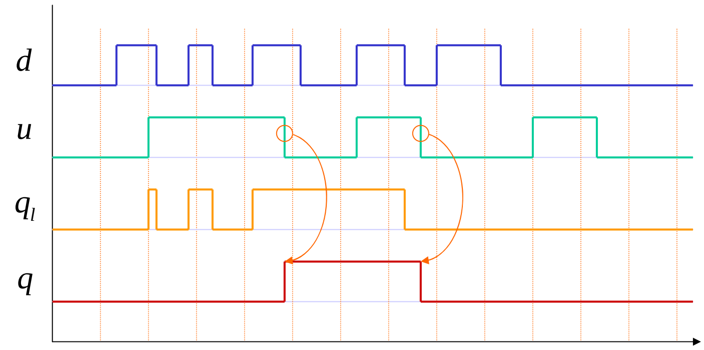
$$\boxed{D^1 q_l = u\, d \vee \bar{u}\, q_l}$$

  - izhodna pomnilna celica

$$\boxed{D^1 q = u\, q_l \vee \bar{u}\, q}$$

D pomnilna celica s predpomnjenjem (nad.)

- Časovni diagram za pomnilno celic s predpomnjenjem:



D pomnilna celica s predpomnjenjem (nad.)

- Diagram prehajanja stanj za D pomnilno celico s predpomnjenjem:
  - notranja stanja so določena s stanji notranje q_l in izhodne pomnilne celice q:

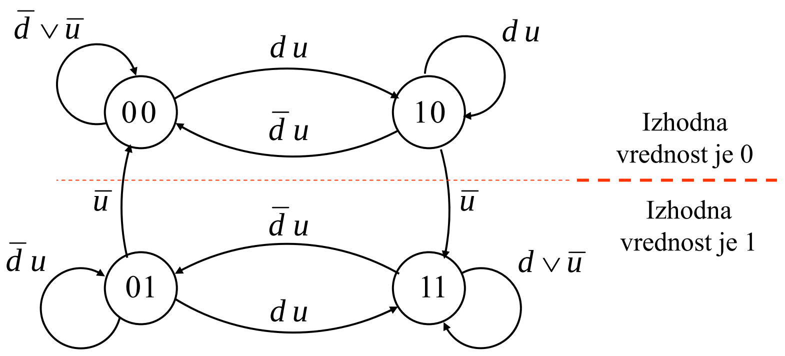
$$\boxed{y = (q_l\, q)}$$

  - pogoje za prehod pa predstavljajo vhodi *d* in *u*.

N. Zimic 8-55

D pomnilna celica s predpomnjenjem (nad.)

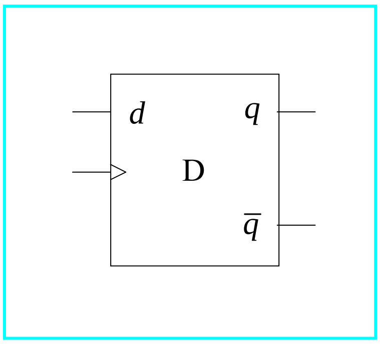
- Diagram prehajanja stanj:



N. Zimic 8-56

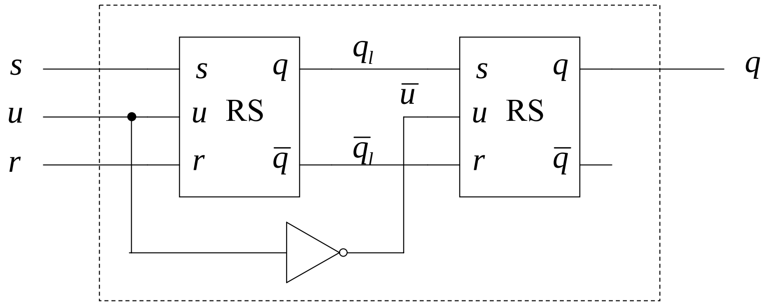
D pomnilna celica s predpomnjenjem (nad.)

- Logični simbol za D pomnilno celico s predpomnjenjem:



RS pomnilna celica s predpomnjenjem (nad.)

- S povezavo dveh pomnilnih celic dobimo pomnilno celico s predpomnjenjem:



RS pomnilna celica s predpomnjenjem (nad.)

- Enačba RS pomnilne celice s predpomnjenjem:
  - notranja pomnilna celica

    $$D^1 q_l = \overline{r}\, q_l \vee s$$

  - izhodna pomnilna celica

    $$D^1 q = q_l$$

RS pomnilna celica s predpomnjenjem (nad.)

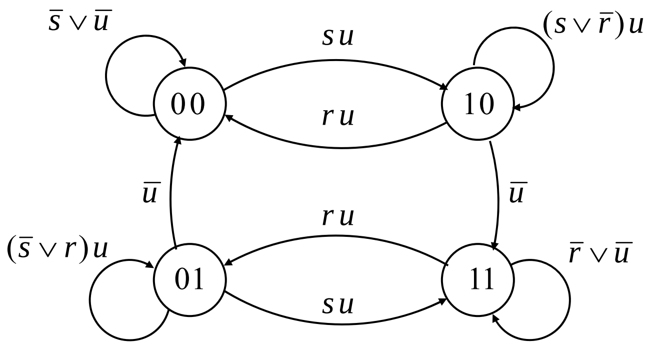
- Diagram prehajanja stanj za RS pomnilno celico s predpomnjenjem:
  - notranja stanja so določena s stanji notranje q_l in izhodne pomnilne celice q:

    $$y = (q_l\, q)$$

  - pogoje za prehod pa predstavljata vhoda r, s in u.

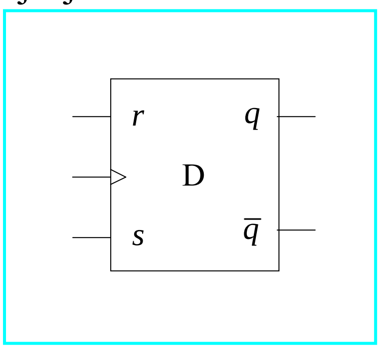
RS pomnilna celica s predpomnjenjem (nad.)

- Diagram prehajanja stanj:



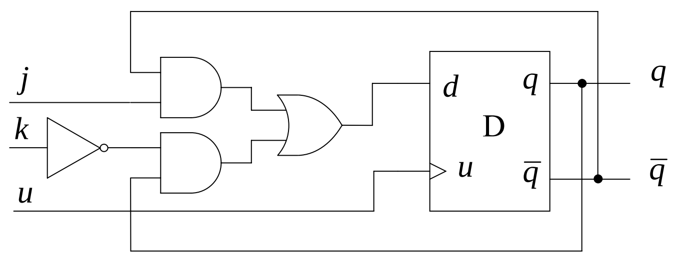
RS pomnilna celica s predpomnjenjem (nad.)

- Logični simbol za RS pomnilno celico s predpomnjenjem:



JK pomnilna celica na osnovi D celice

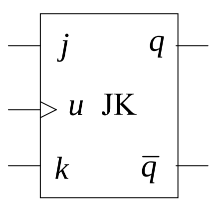
- JK pomnilna celica lahko temelji na D pomnilni celice s predpomnjenjem: $\boxed{D^1 q = q\,\bar{k} \vee \bar{q}\, j}$



JK pomnilna celica na osnovi D celice (nad.)

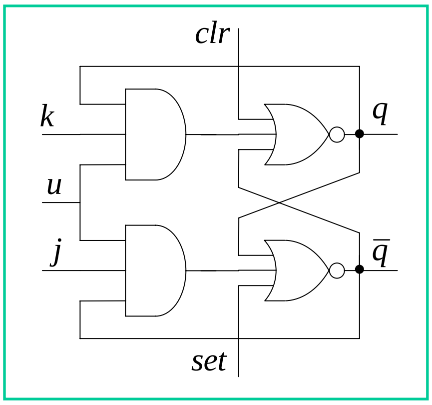
- JK pomnilna celica lahko temelji na D pomnilni celice s predpomnjenjem:

j	k	u	$D^1 q$	$D^1 \bar{q}$
x	x	0	q	$\bar{q}$
x	x	1	q	$\bar{q}$
x	x	$\downarrow$	q	$\bar{q}$
0	0	$\uparrow$	q	$\bar{q}$
0	1	$\uparrow$	0	1
1	0	$\uparrow$	1	0
1	1	$\uparrow$	$\bar{q}$	q



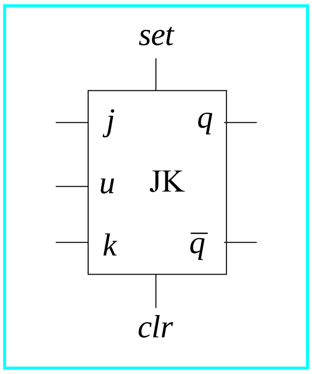
Sinhrone pomnilne celice z asinhronim set in reset

- Primer JK pomnilne celice, z asinhronim vhodom za set in reset.



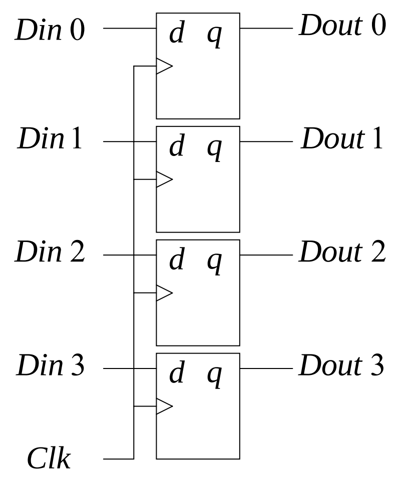
Sinhrone pomnilne celice z asinhronim set in reset

- Primer JK pomnilne celice, z asinhronim vhodom za set in reset.



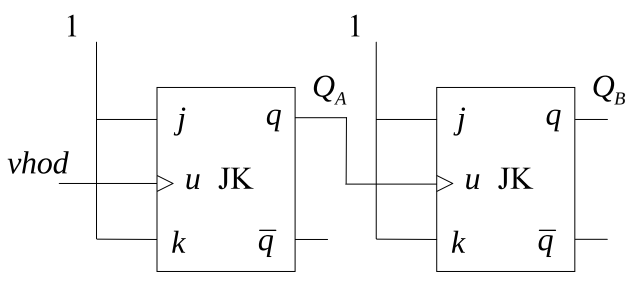
Paralelno zajemanje podatkov

- V računalništvu pogosto hranimo več bitov hkrati.
- Kot primer je so prikazane štiri pomnilne celice, ki delujejo sinhrono z isto uro.



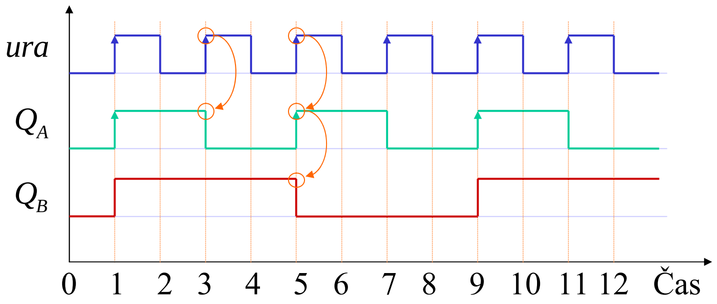
Delilnik frekvence

- JK pomnilno celico lahko uporabimo kot delilnik frekvence



Delilnik frekvence (nad.)

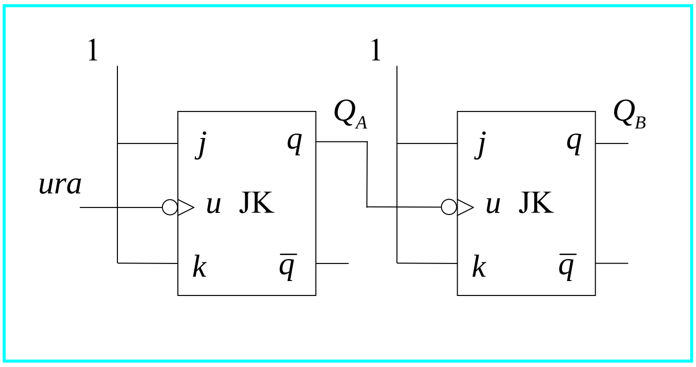
- Časovni diagram za delilnik frekvence:



N. Zimic 8-69

Števec

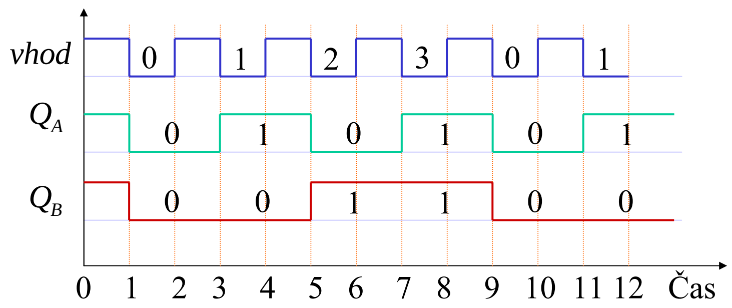
- JK pomnilno celico lahko uporabimo kot števec:



N. Zimic 8-70

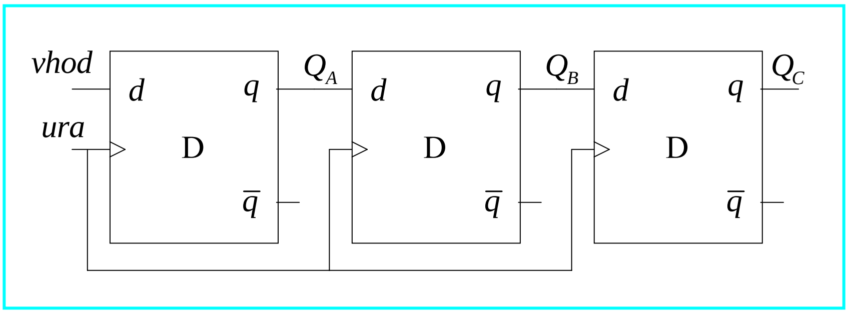
Števec (nad.)

- Časovni diagram za števec:



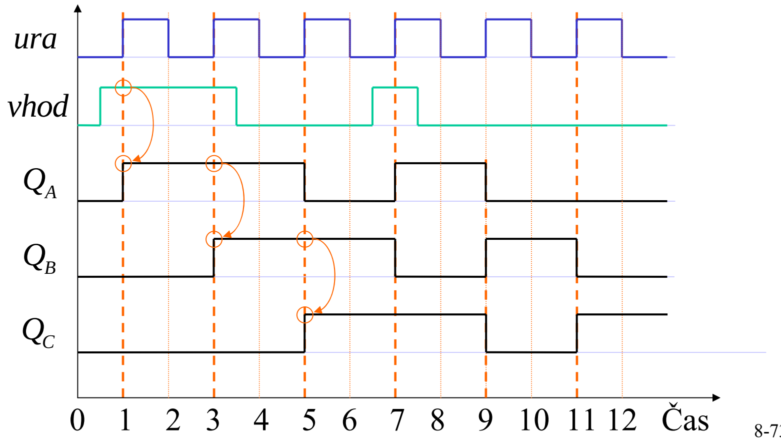
Pomikalni register

- JK pomnilno celico lahko uporabimo kot števec:



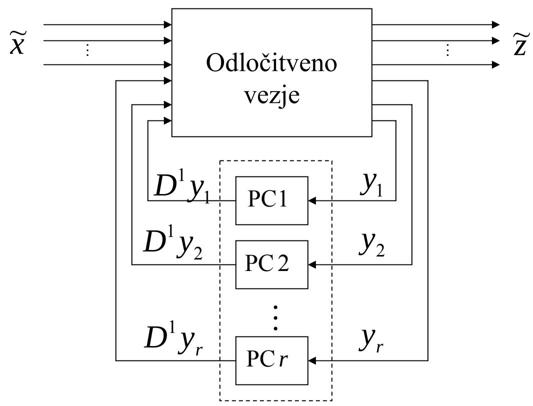
Delilnik frekvence (nad.)

- Časovni diagram za delilnik frekvence:



Model sekvenčnega vezja

- Splošni model:



Model sekvenčnega vezja (nad.)

- Opredelitev spremenljivk sekvenčnega vezja
  - vektor vhodnih spremenljivk
    $\tilde{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$
  - vektor izhodnih spremenljivk
    $\tilde{z} = [z_1, z_2, \ldots, z_m]$
  - vektor krmilnih spremenljivk
    $\tilde{y} = [y_1, y_2, \ldots, y_r]$
  - vektor izhodov iz pomnilnih celic
    $D^1\tilde{y} = [D^1 y_1, D^1 y_2, \ldots, D^1 y_r]$

Model sekvenčnega vezja (nad.)

- V odločitvenem vezju so opredeljene funkcije:
  - izhodne funkcije
    $\tilde{z} = f(\tilde{x}, D^{-1}\tilde{y})$
  - krmilne funkcije
    $\tilde{y} = h(\tilde{x}, D^{-1}\tilde{y})$
- Sinhronizacija je izvedena z uro, ki vstopa v pomnilne celice

Matematična orodja

N. Zimic 9-1

Particije

- Množico $Y=\{y_1,y_2,...,y_r\}$ lahko razdelimo na podmnožice
- Če izberemo takšne podmnožice $B_1,B_2,...,B_q$, da velja:

$$B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_q = Y$$

$$B_i \cap B_j = \emptyset; \quad i \neq j$$

- Dobimo particijo:

$$\pi = \{B_1, B_2, \ldots, B_q\}$$

N. Zimic 9-2

Particije (nad.)

- Element B je blok. Pri q blokih imamo q-bločno particijo
- Nad particijami sta definirana operatorja produkt in vsota
- Produkt particij je presek blokov:

$$\pi = \pi_i \cdot \pi_j = \pi_i \pi_j$$

$$B \in \pi$$

$$B = B_i \cap B_j; \quad B_i \in \pi_i, B_j \in \pi_j$$

Particije (nad.)

- V vsoti particij

$$\pi = \pi_i + \pi_j$$

- so bloki *B*, ki so najmanjše podmnožice Y, ki vsebujejo vse bloke B_i in B_j, kjer velja:

$$B_i \in \pi_i, B_j \in \pi_j \qquad B \in \pi$$

$$B_i \cap B = B_i \quad \text{ali} \quad B_i \cap B = \varnothing$$

$$B_j \cap B = B_j \quad \text{ali} \quad B_j \cap B = \varnothing$$

Particije (nad.)

- Primer:

$$Y = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$$
$$\pi_i = \{\overline{1}, \overline{2,3,4}, \overline{5,6,7}, \overline{8}\}$$
$$\pi_j = \{\overline{1,2}, \overline{3,4}, \overline{5,7}, \overline{6}, \overline{8}\}$$

$$\pi_i \pi_j = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{3,4}, \overline{5,7}, \overline{6}, \overline{8}\}$$
$$\pi_i + \pi_j = \{\overline{1,2,3,4}, \overline{5,6,7}, \overline{8}\}$$

Particije (nad.)

- Obstajata dve značilni particiji:
  - particija enote π_E, ki ima vse elemente množice Y združene v enem bloku
  - particija niča $\pi_\varnothing$, kjer vsak element množice Y predstavlja svoj blok
- Če π je poljubna particija, potem velja:

$$\pi_\varnothing \pi = \pi_\varnothing \qquad \pi_E \pi = \pi$$
$$\pi_\varnothing + \pi = \pi \qquad \pi_E + \pi = \pi_E$$

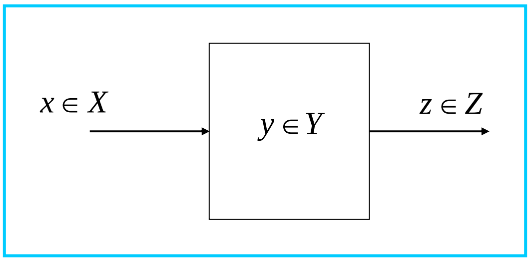
Osnove avtomatov

Končni avtomati

- Definicija končnega avtomata:
  $\boxed{A = \{X, Y, Z, \delta, \lambda\}}$
  - X je neprazna končna možica vhodnih črk avtomata - vhodna abeceda
  - Y je neprazna končna možica notranjih črk avtomata - notranja abeceda
  - Z je končna možica izhodnih črk avtomata - izhodna abeceda
  - δ,λ sta funkciji, ki urejata odnose med množicami

Končni avtomati (nad.)

- Model končnega avtomata:



Končni avtomati (nad.)

- δ je funkcija, ki na osnovi vhodne in notranje črke poda novo notranjo črko (stanje) - funkcija prehajanja stanj:

$$D^1 y = \delta(x, y); \quad x \in X, y \in Y$$

- λ je funkcija, ki na osnovi vhodne in notranje črke poda izhodno črko - izhodna funkcija:

$$z = \lambda(x, y); \; x \in X, y \in Y, z \in Z$$

Končni avtomati (nad.)

- Vhodna beseda je časovno zaporedje vhodnih črk
- Notranja beseda je časovno zaporedje notranjih črk, ki so posledica prehajanja stanj v avtomatu
- Izhodna beseda je časovno zaporedje izhodnih črk, ki so posledica prehajanja stanj v avtomatu in vhodnih črk

Končni avtomati (nad.)

- Primer končnega avtomata
  - vhodna abeceda:

    $$\boxed{X = \{a, b\}}$$

  - notranja abeceda:

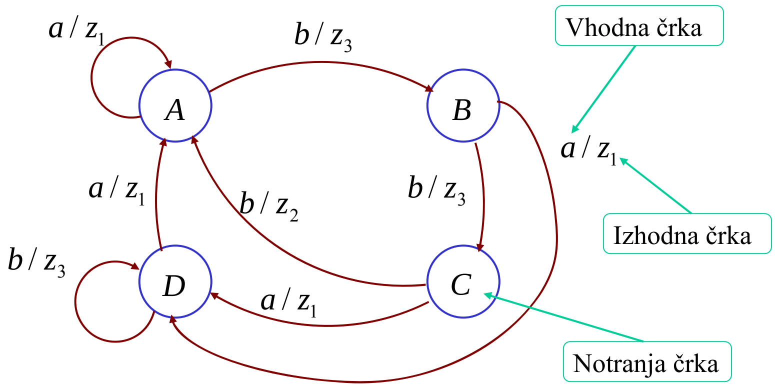
    $$\boxed{Y = \{A, B, C, D\}}$$

  - izhodna abeceda:

    $$\boxed{Z = \{z_1, z_2, z_3\}}$$

Končni avtomati (nad.)

- Diagram prehajanja stanj:



Moorov avtomat

- Moorov končni avtomat je definiran:

$$\boxed{A_{MO} = \{X, B, Z, \delta, \lambda\}}$$

  - X končna neprazna množica vhodnih črk (vhodna abeceda)
  - B končna neprazna množica notranjih stanj (notranja abeceda)
  - Z končna neprazna množica izhodnih črk (izhodna abeceda)
  - $\delta : B \times X \to B$ funkcija naslednjega stanja
  - $\lambda : B \to Z$ izhodna funkcija

Moorov avtomat (nad.)

- Funkcija naslednjega stanja

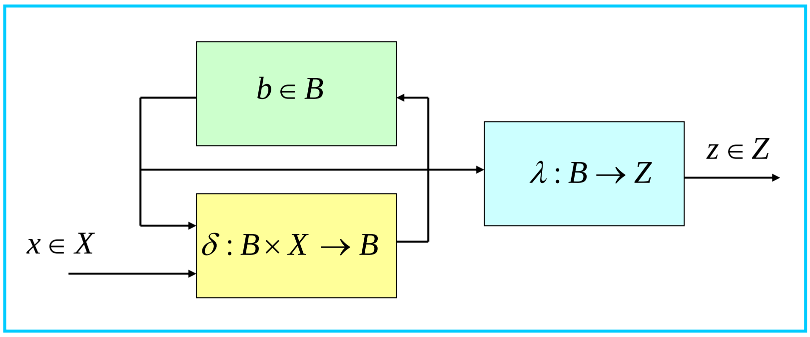
$$\boxed{D^1 b = \delta(b, x)}$$

- Izhodna funkcija

$$\boxed{z = \lambda(b)}$$

Moorov avtomat (nad.)

- Blokovna shema Moorovega avtomata



Moorov avtomat (nad.)

- Primer Moorovega avtomata:

$$\boxed{A_{MO} = \{X, B, Z, \delta, \lambda\}}$$

$$X = \{a, b, c\}$$

$$B = \{A, B, C, D\}$$

$$Z = \{z_1, z_2, z_3\}$$

Moorov avtomat (nad.)

- Primer Moorovega avtomata (nad.):

	z_1	z_2	z_3	z_1
	A	B	C	D
a	B	D	A	B
b	A	B	D	A
c	C	A	C	C

Notranje črke

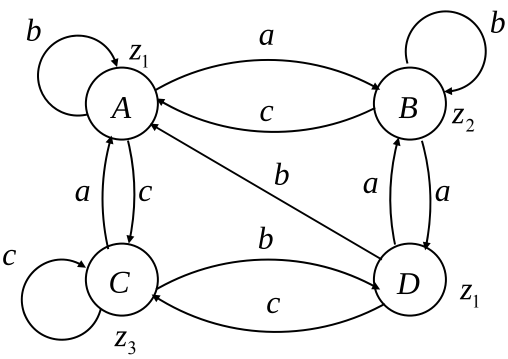
Izhodne črke

Vhodne črke

Funkcija naslednjega stanja

Moorov avtomat (nad.)

- Primer Moorovega avtomata (nad.):



Mealyjev avtomat

- Mealyjev končni avtomat je definiran:

$\boxed{A_{ME} = \{X, A, Z, \delta, \lambda\}}$

  – X končna neprazna množica vhodnih črk (vhodna abeceda)
  – A končna neprazna množica notranjih stanj (notranja abeceda)
  – Z končna neprazna množica izhodnih črk (izhodna abeceda)
  – $\delta : A \times X \to A$ funkcija naslednjega stanja
  – $\lambda : A \times X \to Z$ izhodna funkcija

Mealyjev avtomat (nad.)

- Funkcija naslednjega stanja

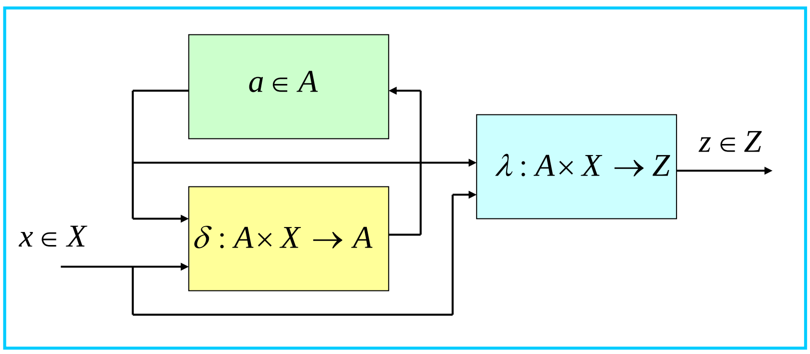
$$\boxed{D^1 a = \delta(a, x)}$$

- Izhodna funkcija

$$\boxed{z = \lambda(a, x)}$$

Mealyjev avtomat (nad.)

- Blokovna shema Mealyjevega avtomata



Mealyjev avtomat (nad.)

- Primer Mealyjevega avtomata:

$$\boxed{A_{ME} = \{X, A, Z, \delta, \lambda\}}$$

$$X = \{a, b, c\}$$
$$A = \{A, B, C, D\}$$
$$Z = \{z_1, z_2, z_3\}$$

Mealyjev avtomat (nad.)

- Primer Mealyjevega avtomata (nad.):

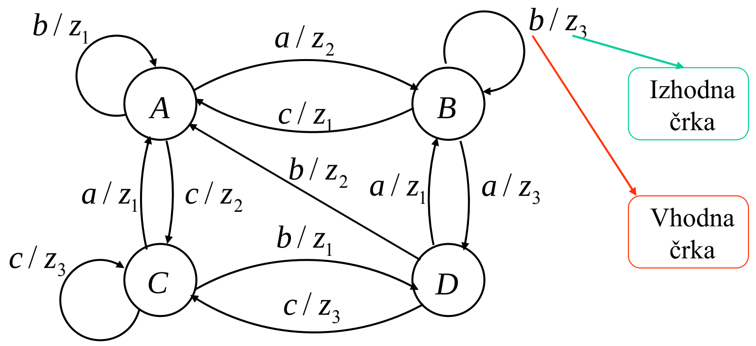
	A	B	C	D
a	B/z_2	D/z_3	A/z_1	B/z_1
b	A/z_1	B/z_3	D/z_1	A/z_2
c	C/z_2	A/z_1	C/z_3	C/z_3

Naslednje stanje

Izhodna črka

Mealyjev avtomat (nad.)

- Primer Mealyjevega avtomata (nad.):



N. Zimic 10-19

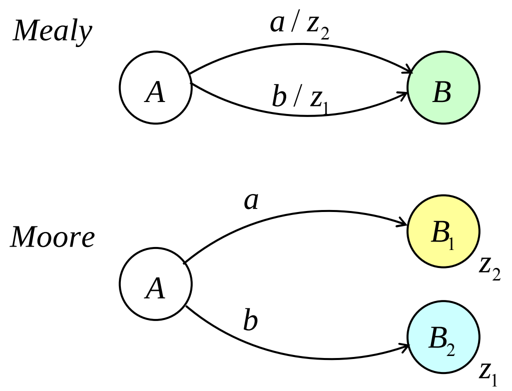
Ekvivalenca končnih avtomatov

- Dva končna avtomanta sta ekvivalnetna, če imata pri istem vhodnem zaporedju črk enako izhodno zaporedje črk.
- Pri pretvorbi Mealyevega avtomata v Moorovega in obratno ne moramo upoštevati tako ostre definicije. Razlika se pojavi, ker avtomat Mealeyevega tip generira izhodno črko šele, ko se na vhodu pojavi prva vhodna črka

N. Zimic 10-20

Pretvorba Mealyevega v Moorov avtomat

- Primer pretvorbe:



Pretvorba Mealyevega v Moorov avtomat (nad.)

- Mealyev avtomat je definiran:

  $$\boxed{A_{ME} = \{X, A, Z, \delta_{ME}, \lambda_{ME}\}}$$

  $x \in X, \quad a \in A, \quad z \in Z$

- Ustrezna preslikava v Moorov avtomat je:

  $$\boxed{A_{MO} = \{X, B, Z, \delta_{MO}, \lambda_{MO}\}}$$

  $x \in X, \quad z \in Z$

  – množico notranjih stanj Moorovega avtomata tvorijo pari notranjega stanja in izhodne črke Mealyevega avtomata:

  $$\boxed{[a, z] \in B}$$

Pretvorba Mealyevega v Moorov avtomat (nad.)

- Izhodna funkcija Moorovega avtomata je:

$$\lambda_{MO}([a,z]) = z$$

- Funkcija prehajanja stanj Moorovega avtomata je:

$$\delta_{MO}([a,z],x) = [\delta_{ME}(a,x),\lambda(a,x)]$$

- Ker pri Mealiyevem avtomatu nastopi vrednost na izhodu šele pri prvi vhodni črki, je izhod zakasnjen za en znak.

Pretvorba Mealyevega v Moorov avtomat (nad.)

- Ker je pri Moorovem avtomatu izhod prisoten že pred prvo vhodno črko, je to bistvena razlika v primerjavi z Mealyevim avtomatom. Problem lahko rešimo tako, da si za začetno stanje izberemo stanje s poljubno izhodno črko.

Pretvorba Mealyevega v Moorov avtomat (nad.)

- Primer pretvorbe avtomata:

	a_1	a_2	a_3	a_4
x_1	a_2 / z_2	a_4 / z_3	a_1 / z_1	a_2 / z_1
x_2	a_1 / z_1	a_2 / z_3	a_4 / z_1	a_1 / z_2
x_3	a_3 / z_2	a_1 / z_1	a_3 / z_3	a_3 / z_3

$$X = \{x_1, x_2, x_3\}$$

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$$

$$Z = \{z_1, z_2, z_3\}$$

Pretvorba Mealyevega v Moorov avtomat (nad.)

- Ustrezni Moorov avtomat je:

$$B = \{[a_1, z_1],[a_1, z_2],[a_1, z_3],[a_2, z_1],[a_2, z_2],[a_2, z_3],$$
$$[a_3, z_1],[a_3, z_2],[a_3, z_3],[a_4, z_1],[a_4, z_2],[a_4, z_3]\}$$

$$B = \{b_{11}, b_{12}, b_{13}, b_{21}, b_{22}, b_{23}, b_{31}, b_{32}, b_{33}, b_{41}, b_{42}, b_{43}\}$$

	z_1	z_2	z_3	z_1	z_2	z_3	z_1	z_2	z_3	z_1	z_2	z_3
	b_{11}	b_{12}	b_{13}	b_{21}	b_{22}	b_{23}	b_{31}	b_{32}	b_{33}	b_{41}	b_{42}	b_{43}
x_1	b_{22}	b_{22}	b_{22}	b_{43}	b_{43}	b_{43}	b_{11}	b_{11}	b_{11}	b_{21}	b_{21}	b_{21}
x_2	b_{11}	b_{11}	b_{11}	b_{23}	b_{23}	b_{23}	b_{41}	b_{41}	b_{41}	b_{12}	b_{12}	b_{12}
x_3	b_{32}	b_{32}	b_{32}	b_{11}	b_{11}	b_{11}	b_{33}	b_{33}	b_{33}	b_{33}	b_{33}	b_{33}

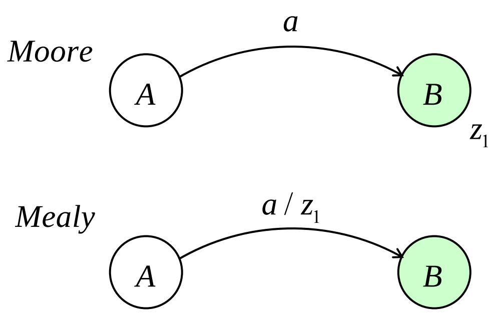
Pretvorba Mealyevega v Moorov avtomat (nad.)

- Ker vsa stanja v novem avtomatu niso dosegljiva (b_{13},b_{31},b_{42}), jih lahko izločimo:

	z_1	z_2	z_1	z_2	z_3	z_2	z_3	z_1	z_3
	b_{11}	b_{12}	b_{21}	b_{22}	b_{23}	b_{32}	b_{33}	b_{41}	b_{43}
x_1	b_{22}	b_{22}	b_{43}	b_{43}	b_{43}	b_{11}	b_{11}	b_{21}	b_{21}
x_2	b_{11}	b_{11}	b_{23}	b_{23}	b_{23}	b_{41}	b_{41}	b_{12}	b_{12}
x_3	b_{32}	b_{32}	b_{11}	b_{11}	b_{11}	b_{33}	b_{33}	b_{33}	b_{33}

Pretvorba Moorovega v Mealyev avtomat

- Primer pretvorbe:



Pretvorba Moorovega v Mealyev avtomat (nad.)

- Pretvorba Moorovega v Mealyev avtomat je manj zapletena. Problem nastane pri začetnem stanju, ki je pri Moorovem avtomatu definirano, pri Mealyevem avtomatu pa se postavi šele pri prvi vhodni črki.
- Funkcija prehajanja stanj je:

$$\boxed{\delta_{ME}(a,x) = \delta_{MO}(b,x)}$$

Množici notranjih stanj sta enaki

- Izhodna funkcija je:

$$\boxed{\lambda_{ME}(a,x) = \lambda_{MO}(\delta_{MO}(b,x))}$$

N. Zimic 10-29

Pretvorba Moorovega v Mealyev avtomat (nad.)

- Podan je Moorov avtomat, ki ima dodano začetno stanje b_0, ki nima izhodne črke.

Izhod ni definiran

	u	z_2	z_1	$-$	z_1
	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4
x_1	b_1	b_3	$-$	b_4	b_3
x_2	b_2	$-$	$-$	b_0	$-$

Stanje ni definirano

N. Zimic 10-30

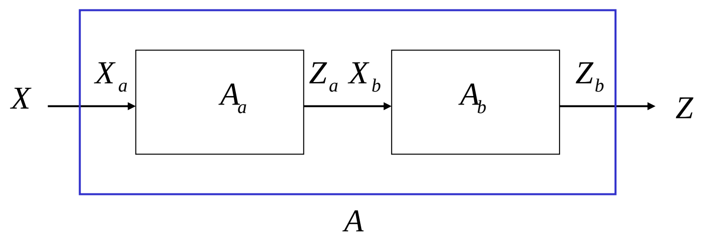
Pretvorba Moorovega v Mealyev avtomat (nad.)

- Ekvivalenten Mealyev avtomat je:

	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
x_1	a_1 / z_2	$a_3 / -$	$- / -$	a_4 / z_1	$a_3 / -$
x_2	a_2 / z_1	$- / -$	$- / -$	$a_0 / -$	$- / -$

Zaporedna vezava avtomatov

- Slika zaporedne vezave avtomatov:



Novo notranje stanje (y_a, y_b)

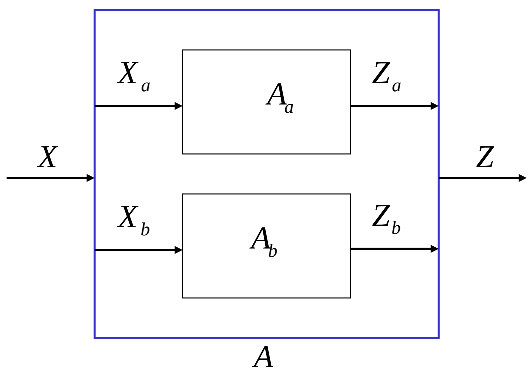
Zaporedna vezava avtomatov (nad.)

- Končni avtomat, ki ga dobimo z zaporedno vezavo avtomatov:

$$A_a = \{X_a, Y_a, Z_a, \delta_a, \lambda_a\}$$
$$A_b = \{X_b, Y_b, Z_b, \delta_b, \lambda_b\}$$
$$y_a \in Y_a,\ y_b \in Y_b,\ x \in X,\ Y = Y_a \times Y_b,\ Z = Z_b,\ X = X_a$$
$$\delta((y_a, y_b), x) = (\delta_a(y_a, x), \delta_b(y_b, \lambda_a(y_a, x)))$$
$$\lambda((y_a, y_b), x) = \lambda_b(y_b, \lambda_a(y_a, x))$$
$$A = \{X, Y, Z, \delta, \lambda\}$$

Paralelna vezava avtomatov

- Slika paralelne vezave avtomatov:



Paralelna vezava avtomatov(nad.)

- Končni avtomat, ki ga dobimo s paralelno vezavo avtomatov:

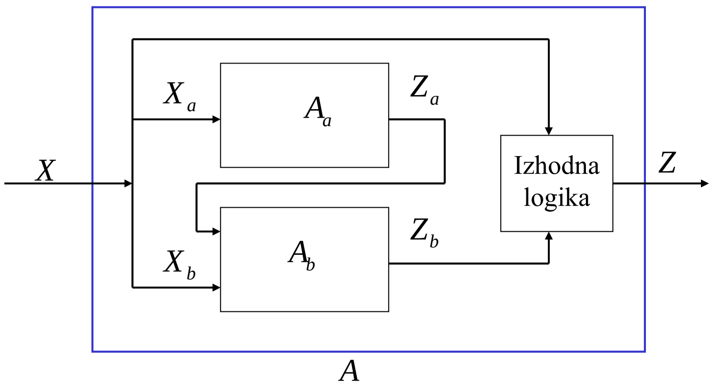
$$A_a = \{X_a, Y_a, Z_a, \delta_a, \lambda_a\}$$
$$A_b = \{X_b, Y_b, Z_b, \delta_b, \lambda_b\}$$

$$y_a \in Y_a,\ y_b \in Y_b,\ x_a \in X_a,\ x_b \in X_b,\ Y = Y_a \times Y_b,\ X_a \subseteq X,\ X_b \subseteq X$$

$$\delta((y_a, y_b),(x_a, x_b)) = (\delta_a(y_a, x_a), \delta_b(y_b, x_b))$$
$$\lambda((y_a, y_b),(x_a, x_b)) = (\lambda_a(y_a, x), \lambda_b(y_b, x))$$
$$A = \{X, Y, Z, \delta, \lambda\}$$

Serijska dekompozicija avtomata

- Slika serijske dekompozicije avtomatov:



Serijska dekompozicija avtomata (nad.)

- Dekompozicija avtomata je možna le v primeru, če velja:

  $\boxed{\pi_a \pi_b = \pi_\varnothing}$

  kjer se particiji nanašata na notranja stanja avtomata *a* in *b*
- in ima vsaj ena od particij substitucijsko značilnost

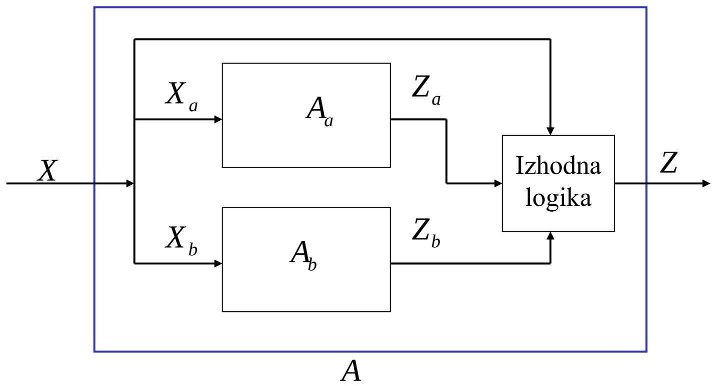
  $\pi = \{B_1, B_2, \ldots, B_q\}$

  $\boxed{\delta(B_i, x) \in B_j}$

N. Zimic 10-37

Paralelna dekompozicija avtomata

- Slika paralelne dekompozicije avtomatov:



N. Zimic 10-38

Paralelna dekompozicija avtomata (nad.)

- Dekompozicija avtomata je možna le v primeru, če velja:

  $\boxed{\pi_a \pi_b = \pi_\varnothing}$

  kjer se particiji nanašata na notranja stanja avtomata *a* in *b*
- in imata particiji substitcijsko zančilnost

  $\pi = \{B_1, B_2, \ldots, B_q\}$

  $\boxed{\delta(B_i, x) \in B_j}$

Serijska dekompozicija Moorovega avtomata

- Podan je Moorov avtomat:

  $X = \{x_1, x_2\}$

  $B = \{1,2,3,4,5\}$

  $Z = \{z_0, z_1, z_2\}$

	z_2	z_0	z_1	z_2	z_2
	1	2	3	4	5
x_1	5	3	1	2	1
x_2	3	4	5	3	4

Serijska dekompozicija Moorovega avtomata (nad.)

- Za podano particijo preverimo, če obstaja serijska dekompozicija:

  $\pi_a = \{\overline{1,2}, \overline{3,4,5}\}$

- Poiskati je potrebno particijo, tako da velja:

  $\pi_a \pi_b = \pi_\varnothing$

- Particija, ki ustreza gornjemu pogoju je:

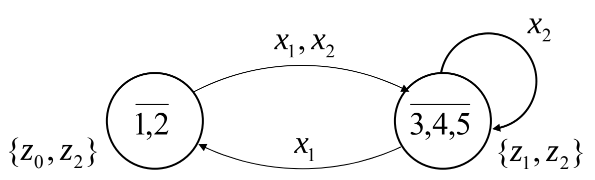
  $\pi_b = \{\overline{1,3}, \overline{2,4}, \overline{5}\}$

N. Zimic 10-41

Serijska dekompozicija Moorovega avtomata (nad.)

- Slika avtomata, ki ustreza particiji *a*

  $\pi_a = \{\overline{1,2}, \overline{3,4,5}\}$



N. Zimic 10-42

Serijska dekompozicija Moorovega avtomata (nad.)

- Avtomat, ki ustreza particiji *a*, lahko zapišemo:

	z_2	z_0	z_1	z_2	z_2
	1	2	3	4	5
x_1	5	3	1	2	1
x_2	3	4	5	3	4

	$\{z_0, z_2\}$	$\{z_1, z_2\}$
	b_1	b_2
x_1	b_2	b_1
x_2	b_2	b_2

- Notranja stanja novega avtomata so:

$$B = \{b_1, b_2\}$$

Serijska dekompozicija Moorovega avtomata (nad.)

- Drugi avtomat ima za osnovo particijo *b*:

$$\pi_b = \{\overline{1,3}, \overline{2,4}, \overline{5}\}$$

- Notranja stanja drugega avtomata, ki ustrezajo patriciji *b* so:

$$B = \{b_a, b_b, b_c\}$$

- Vhodno abecedo za drugi avtomat tvorijo pari vhodnih črk in notranjih stanj prvega avtomata (izhodna črka prvega avtomata je kar enaka notranji črki): $X = \{b_1\,x_1, b_1\,x_2, b_2\,x_1, b_2\,x_2\}$

Serijska dekompozicija Moorovega avtomata (nad.)

- Primer izračuna tabele prehajanja stanj za drugi avtomat:
  - vhodna črka $b_1\ x_1$
  - stanje b_a

  $b_1 = \{1,2\} \qquad b_a = \{1,3\}$

  $b_1 \cap b_a = \{1,2\} \cap \{1,3\} = \{1\}$

  Vhodna črka vsebuje stanje prvega avtomata. Presek stanja prvega in drugega avtomata je stanje osnovnega avtomata

  - originalni avtomat pri vhodni črki x_1 in stanju 1 preide v stanje 5, ki je vsebovano v stanju b_c drugega avtomata.

Serijska dekompozicija Moorovega avtomata (nad.)

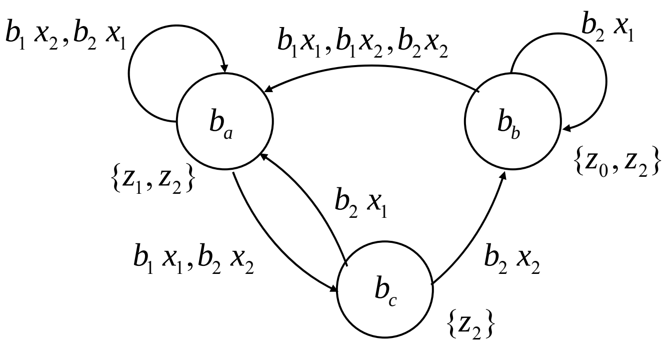
- Tabela prehajanja stanj za drugi avtomat:

		$\{z_1, z_2\}$ b_a	$\{z_0, z_2\}$ b_b	$\{z_2\}$ b_c
b_1	x_1	b_c	b_a	–
b_1	x_2	b_a	b_b	–
b_2	x_1	b_a	b_b	b_a
b_2	x_2	b_c	b_a	b_b

Serijska dekompozicija Moorovega avtomata (nad.)

- Slika drugega avtomata, ki ustreza particiji *b*

$\pi_a = \{\overline{1,3}, \overline{2,4}, \overline{5}\} = \{b_a, b_b, b_c\}$



Serijska dekompozicija Moorovega avtomata (nad.)

- Ker je presek particij avtomata A_a in avtomata A_b particija niča, lahko določimo vsa stanja osnovnega avtomata :

$$b_1 \cap b_a = \{1,2\} \cap \{1,3\} = \{1\} \quad \dots \quad z_2$$
$$b_1 \cap b_b = \{1,2\} \cap \{2,4\} = \{2\} \quad \dots \quad z_0$$
$$b_1 \cap b_c = \{1,2\} \cap \{5\} = \{\varnothing\}$$
$$b_2 \cap b_a = \{3,4,5\} \cap \{1,3\} = \{3\} \quad \dots \quad z_1$$
$$b_2 \cap b_b = \{3,4,5\} \cap \{2,4\} = \{4\} \quad \dots \quad z_2$$
$$b_2 \cap b_c = \{3,4,5\} \cap \{5\} = \{5\} \quad \dots \quad z_2$$

Serijska dekompozicija Moorovega avtomata (nad.)

- Izhodne črke dobimo na osnovi stanj:

$$z_0 = b_1 \cap b_b$$

$$z_1 = b_2 \cap b_a$$

$$z_2 = b_1 \cap b_a \cup b_2 \cap b_b \cup b_2 \cap b_c$$

Paralelna dekompozicija Moorovega avtomata

- Podan je Moorov avtomat:

$$X = \{x_1, x_2\}$$

$$B = \{1,2,3,4,5\}$$

$$Z = \{z_1, z_2\}$$

	z_1	z_1	z_1	z_2	z_1
	1	2	3	4	5
x_1	5	4	5	2	1
x_2	3	2	2	3	2

Paralelna dekompozicija Moorovega avtomata (nad.)

- Za dekompozicijo izberemo particije:

$$\pi_a = \{\overline{1,2,3}, \overline{4,5}\}$$

$$\pi_b = \{\overline{1,4}, \overline{2,5}, \overline{3}\}$$

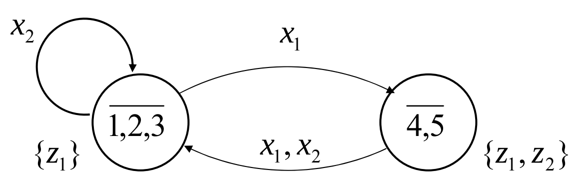
- Veljati mora:

$$\pi_a \pi_b = \pi_\varnothing$$

N. Zimic 10-51

Paralelna dekompozicija Moorovega avtomata (nad.)

- Diagram prehajanja stanj za avtomat A_a, za katerega velja substitucijska značilnost:



N. Zimic 10-52

Paralelna dekompozicija Moorovega avtomata (nad.)

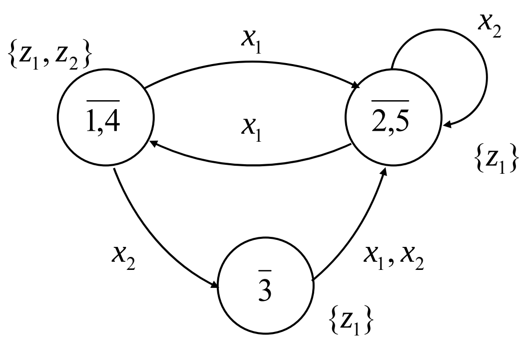
- Avtomat A_a:

	z_1	z_1	z_1	z_2	z_1
	1	2	3	4	5
x_1	5	4	5	2	1
x_2	3	2	2	3	2

	$\{z_1\}$	$\{z_1, z_2\}$
	b_1	b_2
x_1	b_2	b_1
x_2	b_1	b_1

Paralelna dekompozicija Moorovega avtomata (nad.)

- Diagram prehajanja stanj za avtomat A_b, za katerega velja substitucijska značilnost:



Paralelna dekompozicija Moorovega avtomata (nad.)

- Avtomat A_b:

	z_1	z_2	z_1	z_1	z_1
	1	4	2	5	3
x_1	5	2	4	1	5
x_2	3	3	2	2	2

	$\{z_1, z_2\}$	$\{z_1\}$	$\{z_1\}$
	b_a	b_b	b_c
x_1	b_b	b_a	b_b
x_2	b_c	b_b	b_b

Paralelna dekompozicija Moorovega avtomata (nad.)

- Ker je presek particij avtomata A_a in avtomata A_b particija niča, lahko določimo vsa stanja osnovnega avtomata :

$$b_1 \cap b_a = \{1,2,3\} \cap \{1,4\} = \{1\} \quad \dots \quad z_1$$
$$b_1 \cap b_b = \{1,2,3\} \cap \{2,5\} = \{2\} \quad \dots \quad z_1$$
$$b_1 \cap b_c = \{1,2,3\} \cap \{3\} = \{3\} \quad \dots \quad z_1$$
$$b_2 \cap b_a = \{4,5\} \cap \{1,4\} = \{4\} \quad \dots \quad z_2$$
$$b_2 \cap b_b = \{4,5\} \cap \{2,5\} = \{5\} \quad \dots \quad z_1$$
$$b_2 \cap b_c = \{4,5\} \cap \{3\} = \{\varnothing\}$$

Paralelna dekompozicija Moorovega avtomata (nad.)

- Izhodne črke dobimo na osnovi stanj:

$$z_1 = b_1 \cap b_a \cup b_1 \cap b_b \cup b_1 \cap b_c \cup b_2 \cap b_b$$
$$z_2 = b_2 \cap b_a$$

Minimizacija avtomatov

- Podan je avtomat Moorovega tipa:

	z_1	z_1	z_1	z_2	z_1	z_2	z_2	z_2
	0	1	2	3	4	5	6	7
x_1	2	5	2	2	4	4	5	2
x_2	3	1	7	3	5	5	1	7
x_3	1	6	1	1	1	1	6	1

$$X = \{x_1, x_2, x_3\}$$
$$B = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$$
$$Z = \{z_1, z_2\}$$

Minimizacija avtomatov (nad.)

- Na osnovi izhodnih črk postavimo particije nad stanji avtomata:

$$\pi_1 = \{\overline{0,1,2,4},\overline{3,5,6,7}\} = \{a,b\}$$

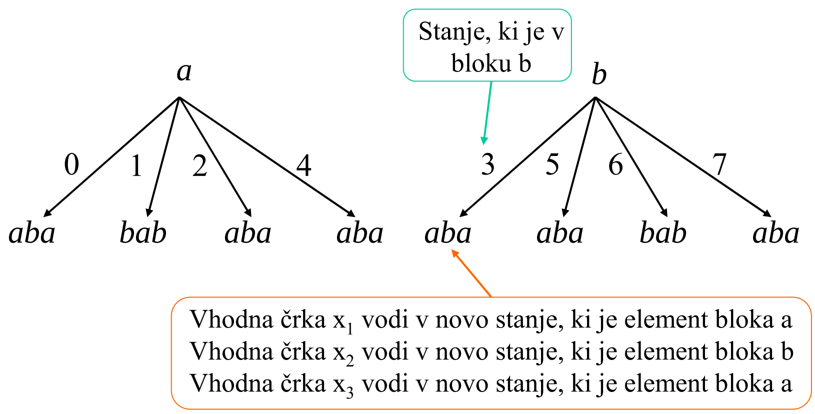
Stanja, pri katerih je izhodna črka z_1

Stanja, pri katerih je izhodna črka z_2

- Na osnovi vhodnih črk izdelamo delitveni proces, pri katerem nastanejo nova notranja stanja

Minimizacija avtomatov (nad.)

- Delitveni proces:

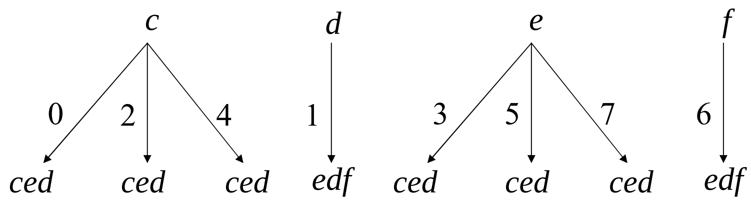


Minimizacija avtomatov (nad.)

- Iz prejšnje slike je razvidno, da se bloka a in b particije π_1, razdelita. Tako dobimo novo particijo:

$$\pi_1 = \{\overline{0,2,4}, \overline{1}, \overline{3,5,7}, \overline{6}\} = \{c, d, e, f\}$$

- Nadaljujemo delitveni proces:



Minimizacija avtomatov (nad.)

- Pri zadnjem delitvenem procesu opazimo, da prehod iz istega bloka particije pri isti vhodni črki vedno vodi v enak blok. Primer:
  – če se avtomat nahaja v bloku c, ki vsebuje stanja {0,2,4}, bo avtomat pri teh stanjih in pri vhodni črki x_1 vedno prešel v stanje, ki je zajeto v bloku c. Pri vhodni črki x_2, bo prešel v stanje bloka e in pri vhodni črki x_3 v stanje, ki je v bloku d
- Stanja, ki so zajeta v istem bloku particije, so ekvivalentna, kar pomeni, da jih lahko nadomestimo z enim samim stanjem.

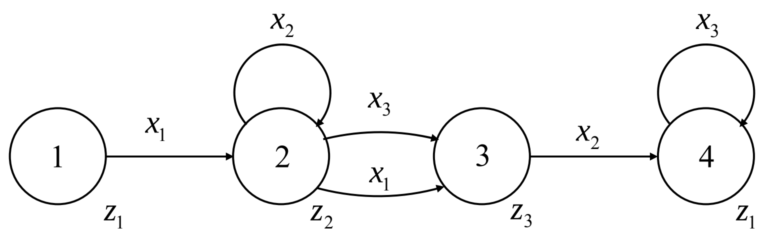
Minimizacija avtomatov (nad.)

- V našem primeru velja enakost stanj:
  - stanje 0 = 2 = 4
  - stanje 3 = 5 = 7
- Tako dobimo avtomat:

	z_1	z_1	z_2	z_2
	0	1	3	6
x_1	0	3	0	3
x_2	3	1	3	1
x_3	1	6	1	6

Vhodne in izhodne besede

- Avtomat je podan z diagramom prehajanja stanj:



$$X = \{x_1, x_2, x_3\}$$
$$B = \{1,2,3,4\}$$
$$Z = \{z_1, z_2, z_3, z_1\}$$

Vhodne in izhodne besede (nad.)

- Zaporedje črk imenujemo beseda. Pri avtomatu poznamo:
  - vhodno besedo
  - notranjo besedo
  - izhodno besedo
- Primer besed za avtomat:

$X_1 = x_1\, x_2\, x_2\, x_1\, x_2$ $\qquad$ $X_1 = x_1\, x_3\, x_2\, x_3$

$B_1 = 1\,2\,2\,2\,3\,4$ $\qquad$ $B_1 = 1\,2\,3\,4\,4$

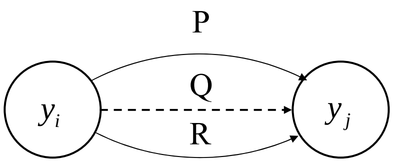
$Z_1 = z_1\, z_2\, z_2\, z_2\, z_3\, z_1$ $\qquad$ $Z_1 = z_1\, z_2\, z_3\, z_1\, z_1$

Regularni izrazi

- Relacije med vhodnimi in izhodnimi besedami avtomata podajamo z regularnimi izrazi
- Za abecedo $X=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ velja:
  - $\Phi,\lambda, x_1,x_2,\ldots,x_n$ so osnovni regularni izrazi
    - Φ - prenos niča
    - λ - prenos enote (beseda dolžine nič)
  - Če sta P in R regularna izraza, potem so definirane operacije:
    - vsote P+R, hkratnosti
    - produkta P R, zapovrstnosti
    - iteracije $P^*=\{P\}$

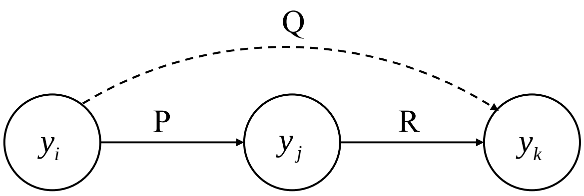
Regularni izrazi (nad.)

- Operacija vsote Q=P+R:



Regularni izrazi (nad.)

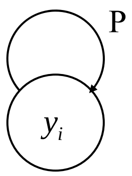
- Operacija produkta Q=P R:



Regularni izrazi (nad.)

- Operacija iteracije P=P*:

  $\mathrm{P}^* = \{\mathrm{P}\} = \lambda + \mathrm{P} + \mathrm{PP} + \ldots$



Regularni izrazi (nad.)

- Pravila, ki veljajo za regularne izraze:
  - P + R = R + P (komutativnost vsote)
  - (P + R) + Q = P + (R + Q) (asociativnost vsote)
  - P + P = P (idempotentnost vsote)
  - (P R) Q = P (R Q) (asociativnost produkta)
  - (P + R) Q = P Q + R Q
  - $(\mathrm{P}^*)^* = \mathrm{P}^*$ (idempotentnost iteracije)
  - $\mathrm{P}^* = \lambda + \mathrm{P}\,\mathrm{P}^*$ (razvijanje iteracije)
  - $\mathrm{P}\,\mathrm{P}^* = \mathrm{P}^*\,\mathrm{P}$ (komutativnost iteracije in neiteracije)

Regularni izrazi (nad.)

- $P^* P^* = P^*$ (produktna idempotentnost iteracije)
- $P^* + P = P^*$ (nevtralnost iteracije in neiteracije)
- $\lambda P = P \lambda = P$ (nevtralnost prenosa enote)
- $\Phi P = P \Phi = \Phi$ (spodnja meja)
- $\lambda + P = P + \lambda = \lambda$ (zgornja meja)
- $P + \Phi = \Phi + P = P$ (nevtralnost prenosa niča)